מד"ר   פתרון תרגיל 2:

.1

א. אינטגרציה חוזרת:

$$y''=\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\ln|x|+c_1\Rightarrow y=x\ln|x|-x+c_1x+c_2=x\ln|x|+k_1x+k_2$$

ב. נציב $y'=z$ ואז, $z'=-\frac{x}{z}$ מד"ר פרידה. נפריד משתנים לקבל $zdz=-xdx$. אינטגרציה נותנת:

$$\frac{z^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c_1\Rightarrow z^2=-x^2+k_1$$

הקבוע k_1 מוכרח כמובן להיות אי שלילי, ולכן נוכל לרשום $k_1=a_1^2$ עבור $a_1\geq 0$. אם כן:

$$z^2=a_1^2-x^2\Rightarrow (y')^2=a_1^2-x^2\Rightarrow y'=\pm\sqrt{a_1^2-x^2}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a_1^2-x^2}+a_1^2\arcsin\frac{x}{a_1}\right)+a_2$$

ג. x חסר. נציב $y'=p\equiv p(y)$, ואז $y''=p\frac{dp}{dy}$. המד"ר היא $yp\frac{dp}{dy}+p^2=p^3$. נשים לב שמתקבל פתרון כאשר $p\equiv 0$, כלומר כאשר $y=const.$ פונקציה קבועה. המצב הזה לא רלוונטי כי תנאי ההתחלה השני דורש $y'(0)=1\neq 0$. לכן נוכל לחלק ע"י p לקבל $y\frac{dp}{dy}+p=p^2$. נעביר אגפים לקבל $y\frac{dp}{dy}=p^2-p$. נשים לב שמתקבל פתרון כאשר $p\equiv 0$ או $p\equiv 1$. המקרה $p\equiv 0$ כבר נפסל אך המקרה השני, שבו $p\equiv 1$ נותן $y'=1\Leftarrow y=x+c$. ע"פ תנאי ההתחלה הראשון, $y(0)=1$ מגלים כי $c=1$, ומתקבל פתרון $y=x+1$. אחרת נוכל לחלק, ולקבל $\frac{dy}{y}=\frac{dp}{p^2-p}$.

ע"י פירוק לשברים חלקיים נוכל לרשום $\frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp$. נוציא אינטגרל:

$$\ln|p-1|-\ln|p|=\ln|y|+c_1\Rightarrow \ln\left|\frac{p-1}{p}\right|=\ln|y|+c_1\Rightarrow \left|\frac{p-1}{p}\right|=e^{c_1}|y|\Rightarrow \frac{p-1}{p}=C_1y$$

נחלץ את p: $p=\frac{1}{1-C_1y}$, כלומר, $y'(x)=\frac{1}{1-C_1y(x)}$, בנקודה $x=0$, נקבל $y'(0)=\frac{1}{1-C_1y(0)}$, על סמך תנאי ההתחלה, זאת אומרת $1=\frac{1}{1-C_1}$ ומגלים כי $C_1=0$. אם כך, המד"ר היא $y'=1$, וכבר ראינו שהפתרון הוא $y=x+1$.

ד. משוואת לגראנז', עם $\varphi(p)=0,\psi(p)=p+\sqrt{1-p^2}$. הפתרון הכללי (רגולרי) הוא, מהנוסחה:

$$\begin{cases} x(p)=e^{\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\left(c+\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}dp\right)\\ y(p)=\varphi(p)x(p)+\psi(p)\end{cases}$$

נחשב:

$$x(p)=1\left(c+\int\frac{\left(1-\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)}{p}\cdot 1\cdot dp\right)=c+\int\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\right)dp=c+\ln|p|-\arcsin p$$

$$y(p)=p+\sqrt{1-p^2}$$

הפתרון הרגולרי בהצגה פרמטרית:

$$\begin{cases} x=c+\ln|p|-\arcsin p \\ y=p+\sqrt{1-p^2} \end{cases}$$

הפתרון הסינגולרי מתקבל כאשר $\varphi(p)=p$, כלומר $p=0$. ואז $y=x\varphi(0)+\psi(0)$, כלומר: $y=1$.

ה. משוואת קלרו עם $\psi(p)=p^2$. פתרון רגולרי: $y=cx+c^2$. פתרון סיגולרי:

$$\begin{cases} x(p)=-\psi'(p) \\ y(p)=-p\psi'(p)+\psi(p) \end{cases}$$

כלומר $\begin{cases} x(p)=-2p \\ y(p)=-p^2 \end{cases}$ (ניתן גם לרשום במפורש $y=-\frac{x^2}{4}$).

ו. $y=-xy'-\frac{1}{2}(y')^2$. משוואת לגראנז' עם $\varphi(p)=-p,\psi(p)=-\frac{1}{2}p^2$. הפתרון הרגולרי:

$$\begin{cases} x(p)=e^{\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\left(c+\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}dp\right) \\ y(p)=\varphi(p)x(p)+\psi(p) \end{cases}$$

כלומר:

$$x(p)=e^{-\int\frac{1}{2p}dp}\left(c+\int\frac{-p}{2p}e^{\int\frac{1}{2p}dp}dp\right)=e^{-\frac{1}{2}\ln|p|}\left(c-\frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{2}\ln|p|}dp\right)=\frac{1}{|p|^{1/2}}\left(c-\frac{1}{2}\int|p|^{1/2}dp\right)=$$

$$=\frac{1}{|p|^{1/2}}\left(c-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\operatorname{sgn}(p)|p|^{3/2}\right)=c|p|^{-1/2}-\frac{1}{3}\operatorname{sgn}(p)|p|=c|p|^{-1/2}-\frac{1}{3}p$$

ואז:

$$y(p)=\frac{1}{3}p^2-cp|p|^{-1/2}-\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{6}p^2-cp|p|^{-1/2}$$

כלומר, הפתרון הרגולרי הוא: $\begin{cases} x(p)=c|p|^{-1/2}-\frac{1}{3}p \\ y(p)=-\frac{1}{6}p^2-cp|p|^{-1/2} \end{cases}$

הפתרון הסינגולרי מתקבל כאשר $p=\varphi(p)$, כלומר $p=0$. ואז $y=0$.

ז. משוואת קלרו, עם $\psi(p)=\frac{1}{p}$. פתרון רגולרי: $y=cx+\frac{1}{c}$. פתרון סינגולרי:

$$\begin{cases} x(p)=-\psi'(p) \\ y(p)=-p\psi'(p)+\psi(p) \end{cases}$$

כלומר, $\begin{cases} x(p)=\frac{1}{p^2} \\ y(p)=\frac{2}{p} \end{cases}$. (ניתן גם לרשום במפורש $x=\frac{y^2}{4}$)

2. שיעורי נקודות החיתוך של המשיק לגרף בנקודה $(x,y(x))$ (ניתן גם לרשום x_0) עם הצירים הם:

$(0,y(x)-y'(x)x),\left(x-\frac{y(x)}{y'(x)},0\right)$. על כן המד"ר היא:

$$\sqrt{(y-xy')^2+\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2}=1$$

כדי לפתור יש להמשיך לפשט:

$$(y-xy')^2+\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2=1^2$$

$$y^2-2xyy'+x^2(y')^2+x^2-2x\frac{y}{y'}+\frac{y^2}{(y')^2}=1^2$$

$$y^2(y')^2-2xy(y')^3+x^2(y')^4+x^2(y')^2-2xyy'+y^2=1^2(y')^2$$

$$\left[1+(y')^2\right]y^2-2xy'\left[1+(y')^2\right]y+(y')^2\left[x^2(y')^2+x^2-1^2\right]=0$$

זוהי משוואה ריבועית עבור y, נפתור אותה:

$$y=\frac{2xy'\left[1+(y')^2\right]\pm\sqrt{4x^2(y')^2\left[1+(y')^2\right]^2-4(y')^2\left[1+(y')^2\right]\left[x^2(y')^2+x^2-1^2\right]}}{2\left[1+(y')^2\right]}$$

$$y=xy'\pm 2\sqrt{1+(y')^2}\,\frac{\sqrt{x^2(y')^2\left[1+(y')^2\right]-(y')^2\left[x^2(y')^2+x^2-1^2\right]}}{2\left[1+(y')^2\right]}$$

$$y=xy'\pm 1y'\left[1+(y')^2\right]^{-1/2}$$

מדובר במשוואות קלרו, עם $\psi(p)=\pm 1p\left(1+p^2\right)^{-1/2}$. פתרון רגולרי: $y=cx\pm 1c\left(1+c^2\right)^{-1/2}$

פתרון סינגולרי: $\begin{cases} x(p)=-\psi'(p) \\ y(p)=-p\psi'(p)+\psi(p) \end{cases}$ ניתן לפשט: $\begin{cases} x(p)=\mp 1\left(1+p^2\right)^{-3/2} \\ y(p)=\pm 1p^3\left(1+p^2\right)^{-3/2} \end{cases}$

.3

א. נניח $c_1x+c_2(x+1)\equiv 0$, מקבלים מייד $c_2=0$ ואחריו $c_1=0$. ולכן הפונקציות $x,x+1$ בת"ל.

ב. הצירוף הלא טריוויאלי $5\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot x$ מתאפס זהותית, ולכן הפונקציות $0,1,x$ ת"ל.

ג. נניח $c_1x+c_2x^2+c_3x^3\equiv 0$, ע"פ יחידות הטור טיילור $c_1=c_2=c_3=0$ והפונקציות ת"ל.

ד. הוורונסקיאן שלהן הוא $W=2e^{6x}\neq 0$, ולכן הפונקציות בת"ל.

ה. הוורונסקיאן שלהן הוא $W=-1\neq 0$, ולכן הפונקציות בת"ל.

4. ידוע כי y,y^2 פותרות את המלד"ה, ולכן y,y^2 ת"ל $\Leftrightarrow W\left[y,y^2\right]\equiv 0$. נחשב:

$$W[y,y^2]=\begin{vmatrix} y & y^2 \\ y' & 2yy' \end{vmatrix}=2y^2y'-y^2y'=y^2y'=\left(\frac{1}{3}y^3\right)'$$

ולכן, $W[y,y^2]\equiv 0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}y^3\right)'=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}y^3=const\Leftrightarrow y=const$. נניח כעת בשלילה שקיימת נקודת קיצון $x_0\in(a,b)$ עבור הפונקציה $y(x)$. ע"פ משפט פרמה מאינפי' $y'(x_0)=0$, אבל אז נקבל $\left(y^2\right)'\Big|_{x=x_0}=2y(x_0)y'(x_0)=0$, ולכן $W[y,y^2](x_0)=\begin{vmatrix} y(x_0) & y^2(x_0) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$, (ע"פ נוסחת ליוביל), $W\equiv 0$ בקטע, ולכן $y(x)$ היא פונקציה קבועה, זו סתירה. מש"ל.

.5

א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

ב. $$y=\begin{cases} c_1e^{\sqrt{k}x}+c_2e^{-\sqrt{k}x} & k>0 \\ c_1+c_2x & k=0 \\ c_1\cos\left(\sqrt{k}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{k}x\right) & k<0 \end{cases}$$

ג. $y=6e^{x/6}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$

ד. (רשות) $y=\sum_{k=0}^{n-1}c_kx^ke^{-x}$

ה. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\frac{32x^3-24x^2+12x}{384}e^{2x}$

ו. $y=\frac{3e^{2x}+6x+12xe^{2x}-6x^2-4x^3}{24}$

ז. $y=x+e^{-x}-2+e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

ח. $y=c_1e^{-x}+c_2+c_3x+c_4x^2+\frac{1}{272}\cos(4x)-\frac{1}{1088}\sin(4x)$

ט. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3e^{-x}+\frac{1}{8}e^x(2x-3)$

י. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+c_3+\cos x+\ln\left|\cos x\right|\cos x+x\sin x$

יא. $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$