שאלה - 3

שאלה - 1

נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל R עם פרמטר k:

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+kx_2+x_3+x_4=k \\ x_1+x_2+kx_3+x_4=k+1 \end{cases}$$

פתרון: נכ' מטריצה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 & k+1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & k+1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2-kR_1\to R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

אם k=1 אזי יש למערכת שורת סתירה בשורה האחרונה.
אחרת נחלק את השורה השנייה והשלישית ב k-1 ונקבל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & 1 & k \\ 0 & 1+k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{1-k} \end{array}\right) \xrightarrow{(1+k)R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & 1 & k \\ 0 & 1+k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -k-2 & -1 & \frac{1+k}{1-k} \end{array}\right) =$$

אם k=-1 נקבל:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_3\to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 1=0$$

אזי יש שורת סתירה אחרת ולכן מערכת של 3 משוואות
ב-4 נעלמים ולכן יש אינסוף פתרונות.
* לא "גרו" שיש למערכת פתרון יחיד.

Scanned by CamScanner

שאלה 2

א) (אין מרחב-וקטורי $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל השדה $\mathbb{R}$ עם פעולת החיבור מטריצות רגיל וכפל בסקלר. (נסמן ב U את קבוצת כל המטריצות ההפיכות שמעליה יחד את מטריצת האפס, כלומר (הפיכה)

$$U=\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \text{ is invertible}\}\cup\{0\}$$

הראה ש- U הוא לא תת מרחב וקטורי של V.

פתרון:

(נבחר שני מטריצות $\underbrace{A,B}_{\text{ב-}U}$ ונראה ש- U אינו סגור תחת חיבור כלומר $A,B\in U$ אבל $A+B\notin U$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$A,B\in U$ כי הן שקולות שורה למטריצת היחידה.

$$A+B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}\notin U$$

כי היא אינה הפיכה ואינה מטריצת האפס.

ב) (אינו תלוי:

$$B=\{1+x^2+2x^3,\ 5+x+6x^2+13x^3,\ -3-x-3x^2-8x^3\}$$

האם B בת"ל?

פתרון: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, ונבדוק האם ד"ל ד"ל צירוף לינארי לא טריוויאלי לוקטור האפס:

$$a(1+x^2+2x^3)+b(5+x+6x^2+13x^3)+c(-3-x-3x^2-8x^3)=0$$

(נאסף סדרים ונשווה מקדמים איברים דומים:

$$(a+5b-3c)+(b-c)x+(a+6b-3c)x^2+(2a+13b-8c)x^3=0$$

ונקבל כי המקדמים שווים לאפס ולכן:

$$\begin{cases} a+5b-3c=0 \\ b-c=0 \\ a+6b-3c=0 \\ 2a+13b-8c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 13 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1\to R_4]{R_3-R_1\to R_3}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[R_4-3R_2\to R_4]{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1-3R_3\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-5R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=b=c=0$$

לכן B בת"ל

שאלה 3 -

במרחב וקטורי $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{R}$ נבחר

$$S=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

מהו $\text{span}(S)$?

פתרון:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\1&0&-1&b\\0&1&1&c\\1&3&0&d\end{array}\right)\xrightarrow[R_4-R_1\to R_4]{R_2-R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&-2&-2&b-a\\0&1&1&c\\0&1&-1&d-a\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&1&1&\frac{a-b}{2}\\0&1&1&c\\0&1&-1&d-a\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&1&1&\frac{a-b}{2}\\0&1&-1&d-a\\0&0&0&c-\frac{a-b}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&1&1&\frac{a-b}{2}\\0&0&-2&d-a-\frac{a-b}{2}\\0&0&0&c-\frac{a-b}{2}\end{array}\right)$$

כדי שלמע' א.ל.ה. יהי' פתרון (דרוש: $c-\frac{a-b}{2}=0$

כלומר $a-b-2c=0$

כלומר

$$\text{span}(S)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \middle|\ a-b-2c=0\right\}$$

שאלה 4

יהיו $v_1,..,v_n \in \mathbb{R}^n$, (כלומר $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ל-A מטריצה
שעמודותיה הן $v_1,...,v_n$ ויהי $b \in \mathbb{R}^m$ וקטור הפתרון.
הוכח: $b \in span(v_1,..,v_n) \Leftrightarrow$ קיים פתרון למערכת
$Ax=b$

פתרון:

$\Leftarrow$ $b \in span(v_1,..,v_n)$ אזי קיימים $a_1,..,a_n$ כך ש

$$a_1v_1+..+a_nv_n=b$$

(כפל מטריצה מטריצה)

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ולכן $(a_1,..,a_n)$ הוא פתרון למערכת $Ax=b$

$\Rightarrow$ נניח ש $Ax=b$.

צ"ל: $b \in span(v_1,..v_n)$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1\vec{v}_1+..+x_nv_n=b$$

ולכן קיימים $a_1,..,a_n$ כך ש:

$$a_1v_1+..+a_nv_n=b$$

כי לפי הנתון יש למערכת פתרון.
ולכן b הוא צירוף לינארי של $v_1,..,v_n$
ולכן $b \in span(v_1,..,v_n)$.

מש"ל.