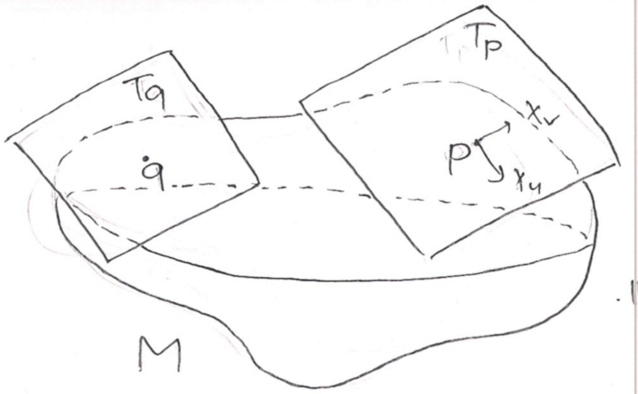
אוריינטציה של יריעות



בחירת כיוון בכל נקודה $p\in M$ מוגדרת
ע"י בחירת אוריינטציה על המרחב המשיק T_p.

במרחב המשיק T_p - האוריינטציה מוגדרת כמו ב-$\mathbb{R}^n$.

ישנם 2 כיוונים שמוגדרים ע"י 2 מחלקות
שקולות של בסיסים.

אוריינטציה על M - בחירה רציפה של מחלקת שקולות של בסיסים ב-T_p עבור כל p.

בפועל, יש 2 דרכים להציג את האוריינטציה:

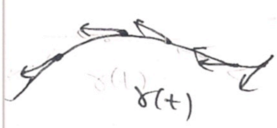
I פרמטריזציה $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ של היריעה משרה אוריינטציה באופן

$$(u_1,\dots u_k) \longrightarrow X(u_1,\dots u_k)$$

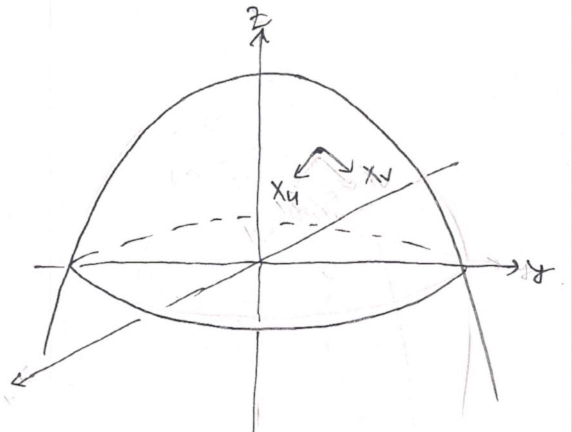
"טבעי" ע"י בחירת הבסיס $\left(\frac{\partial X}{\partial u_1},\dots \frac{\partial X}{\partial u_k}\right)$ בכל T_p.

דוגמאות:

1) עקומות - ראינו בשבוע שעבר



הפרמטריזציה מגדירה כיוון של $\gamma'(t)$
בכל נקודה.



2) המשטח $\{z=1-x^2-y^2\}\subseteq \mathbb{R}^3$

עבור הפרמטריזציה $X:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$$(u,v)\longrightarrow(u,v,1-u^2-v^2)$$

$\Downarrow$

משרה אוריינטציה

$$\left.\begin{aligned} X_u&=(1,0,-2u)\\ X_v&=(0,1,-2v)\end{aligned}\right\} \rightsquigarrow (X_u,X_v)$$

אם משתמשים בפרמטריזציה (אחרת) המתקבלת משינוי הסדר $(u,v)\to(v,u)$ ב-$\mathbb{R}^2$
(זה שקול לבחירת אוריינטציה הפוכה ב-$\mathbb{R}^2$)

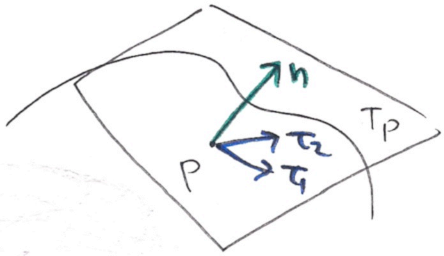
מקבלים הפוכה לאותו המשטח.

$$\tilde X:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

$$(v,u)\longrightarrow(u,v,1-u^2-v^2)$$

$$\left.\begin{aligned} X_v&=(0,1,-2v)\\ X_u&=(1,0,-2u)\end{aligned}\right\} \rightsquigarrow (X_v,X_u)$$

II בחירה רציפה של ווקטור נורמל לעקומה ב-$\mathbb{R}^2$ או משטח ב-$\mathbb{R}^3$

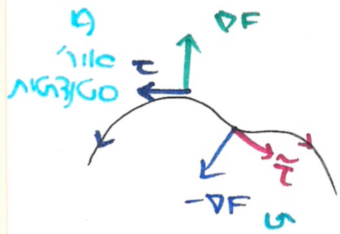


מגדירה אוריינטציה באופן הבא -

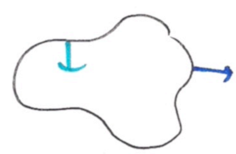
$(\tau_1, \dots \tau_{n-1})$ בסיס ב-T_p המייצג את האוריינטציה אם ביחד עם n מתקבל בסיס השקול לאוריינטציה הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$

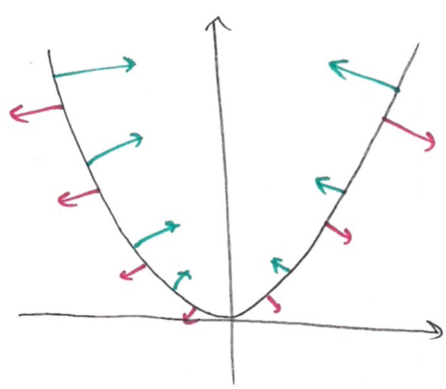
כלומר: $(n, \tau_1, \dots \tau_{n-1}) \sim (e_1, e_2, \dots e_n)$

לרוב, בחירה רציפה של נורמל מוגדרת עבור עקומות/משטחים המוגדרים כאוסף הפתרונות של משוואה $\{F=0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ואז ∇F וגם $-\nabla F$ הם שדות נורמלים למשטח המשרים אוריינטציות הפוכות:



כאשר העקומה/המשטח סגור נשתמש במושג נורמל חיצוני / נורמל פנימי





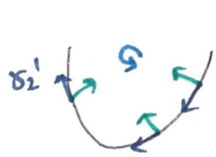
דוגמא - פרבולה $y=x^2$

$F(x,y) = y - x^2 = 0$ $\qquad$ $G(x,y) = x^2 - y = 0$

$\nabla F = (-2x, 1)$ $\qquad$ $\nabla G = (2x, -1)$

תרגיל: מצא פרמטריזציה של הפרבולה המשרה אוריינטציה זהה לזו המושרית ע"י השדה ∇F.

פתרון: אנו מכירים 2 פרמטריזציות של הפרבולה שמשרות אוריינטציות שונות



$\gamma_1(t) = (t, t^2)$
$\gamma_2(t) = (-t, t^2)$
$\Leftarrow$ המטרה היא למצוא את זו המתאימה לשדה ∇F

נרצה לשמור יחד עם ↑ אוריינטציה סטנדרטית ב-$\mathbb{R}^2$ ↺ ולכן נבחר ב-γ_2

כלומר אם $n = (-2x, 1)$! $\tau = (-1, 2t) = \gamma_2'(t)$

$\downarrow x = -t$

$n(t) = (2t, 1)$

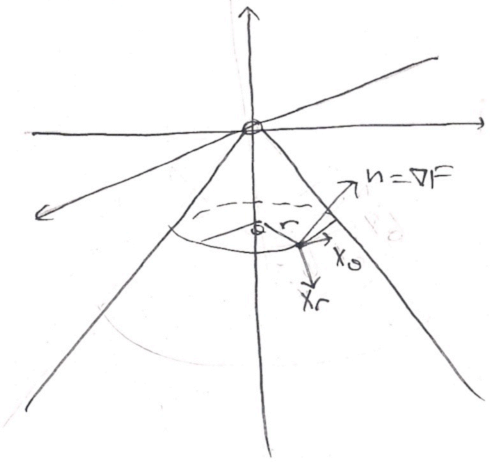
צריך להראות $\binom{n}{\tau} \sim \binom{e_1}{e_2}$

נמצא מטריצת מעבר $\binom{n}{\tau} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ -1 & 2t \end{pmatrix} \binom{e_1}{e_2}$

$\det \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ -1 & 2t \end{pmatrix} = 4t^2 + 1 > 0$

$\Downarrow$

הפרמטריזציה המתאימה היא $\gamma_2(t) = (-t, t^2)$



דוגמא - חרוט $\{z^2 = x^2 + y^2 \quad z<0\}$

מוגדר כמשטח רמה של הפונקציה $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$\{F=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

תרגיל - מצאו פרמטרזציה של החרוט עם אוריינטציה זהה לזו המושרית מ ∇F

<u>פתרון:</u> $\nabla F = (2x, 2y, -2z)$

נמצא פרמטרזציה של החרוט - $z = -\overset{\text{יקוד}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ← מעבר לפולרים

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$\Downarrow$
$z = -r$

$$\Omega = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<r \quad 0 \le \theta < 2\pi)$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$$

$$X_r = (\cos\theta, \sin\theta, -1)$$
$$X_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

*נבחן את האפשרות לשנות את הסדר של (r,θ) על מנת להתאים לשדה ∇F (את האוריינטציה.

$$n = \nabla F = (2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 2r) \quad \leftarrow \quad \begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = -r \end{matrix}$$

$$\tau_1 = (\cos\theta, \sin\theta, -1) \qquad \tau_2 = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

נבדוק האם: $\begin{pmatrix} n \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} n \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos\theta & 2r\sin\theta & 2r \\ \cos\theta & \sin\theta & -1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\det = 2r \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2r\cos\theta & 2r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r^2 + 2r^2 = 4r^2 > 0$$

הדטרמיננטה חיובית ולכן לפרמטרזציה X אוריינטציה התואמת לשדה n.