נכתב על ידי יהונתן רגב

החבורה החופשית

הגדרה

תהי X קבוצה.

החבורה $\mathbb{F}_X$ נקראת **החבורה החופשית**.

איברי החבורה הם מילים באותיות $X \cup X^{-1}$.

הפעולה היא הדבקה.

דוגמה

תהי:

$$X \quad \coloneqq \quad \{a,b,c\}$$

דוגמה לאיברי החבורה החופשית:

$$1 \quad , \quad a \quad , \quad a^{-1} \quad , \quad aa \quad , \quad ab^{-1} \quad , \quad abc^{-1}a^{-1}$$

דוגמה לפעולה בחבורה החופשית:

$$abca^{-1} \cdot abca^{-1} \quad = \quad abcbca^{-1}$$

הערה

לכל $x \in X$, מתקיים:

$$xx^{-1} \quad = \quad 1$$

$$x^{-1}x \quad = \quad 1$$

■

דוגמה

1. מתקיים:

$$\mathbb{F}_{\emptyset} \quad = \quad 1$$

2. מתקיים:

$$\mathbb{F}_{\{a\}} \quad \cong \quad \mathbb{Z}$$

הערה

אם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל $f: X \to Y$, אז קיים איזומורפיזם $\hat{f}: \mathbb{F}_X \to \mathbb{F}_Y$.

לכן, $\mathbb{F}_X$ תלויה רק ב - $|X|$.

דוגמה

קיים שיכון $\mathbb{F}_3 \hookrightarrow \mathbb{F}_2$.

נגדיר:

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & a \\ b & \longmapsto & b \end{array}$$

הערה

קיים שיכון $\mathbb{F}_2 \hookrightarrow \mathbb{F}_3$.

תרגיל: הוכח!

הערה

תהי G חבורה בעלת שני יוצרים g, h.

אזי, קיים אפימורפיזם:

$$\varphi: \quad \mathbb{F}_2 \quad \to \quad G$$

המוגדר על-ידי:

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & g \\ b & \longmapsto & h \end{array}$$

לכן, עפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון:

$$G \quad \cong \quad {}^{\mathbb{F}_2}\!\big/_{\ker\varphi}$$

$$\blacksquare$$

הערה

ייצוג על-ידי יוצרים ויחסים:

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$$

a, b נקראים יוצרים.

$a^2 = b^2 = aba^{-1}b^{-1} = 1$ נקראים יחסים.

עפ״י ההערה, חבורה זו איזומורפית לחבורת המנה:

$$\mathbb{F}_{\{a,b\}} \Big/ \text{תת החבורה הנורמלית הנוצרת על ידי היחסים}$$

זו החבורה הגדולה ביותר שהיוצרים שלה מקיימים את היחסים המוגדרים.

דוגמה

1. מתקיים:

$$\langle a \mid a^6 = 1 \rangle \quad \cong \quad \mathbb{Z}_6$$

2. מתקיים:

$$\langle a, b \mid a^m = b^2 = 1,\ \ bab^{-1} = a^{-1} \rangle \quad \cong \quad \mathcal{D}_m$$

■

הגדרה

יהי $n = 4m$.

נגדיר:

$$Q_{2m} \quad \coloneqq \quad \langle a, b \mid a^m = b^2, b^4 = 1,\ \ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

מתקיים:

$$Q_{2m} \quad = \quad \left\{ a^i b^j \,\middle|\, 0 \le i < m,\ \ 0 \le j < 4 \right\}$$

מתקיים:

$$|Q_{2m}| \quad = \quad 4m$$

■