1. תהי פונקציה f רציפה בקטע הפתוח (a,b), כך שלכל $x\in(a,b)$ $f(x)\in\mathbb{Q}$ (כלומר הפונקציה מקבלת ערכים רציונאליים בלבד בקטע). הוכח/הפרך: f פונקציה קבועה.

הוכחה: נניח בשלילה ש f אינה קבועה, לכן קיימים $x,y\in(a,b)$ כך ש $f(x)\neq f(y)$. f רציפה בקטע הסגור $[x,y]\subseteq(a,b)$ ולכן לפי משפט ערך הביניים מקבלת כל ערך בין $f(x),f(y)$. אבל לפי ארכימדס יש מספרים אי רציונליים בין כל שני רציונאליים ולכן קיים $c\in[x,y]$ כך ש $f(c)\notin\mathbb{Q}$ בסתירה.

2. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ כך ש $f(2)=1$. הוכח שקיימת נקודה $a\in[0,2]$ כך ש $f(a)=\frac{1}{a}$

הוכחה: f רציפה בקטע סגור ולכן לפי משפט היא חסומה שם. כלומר קיים $M>0$ כך שלכל $x\in[0,2]$ מתקיים $-M<f(x)<M$. נבנה פונקציה $g(x)=f(x)-\frac{1}{x}$ פונקציה זו רציפה ב $(0,2]$. $g(2)=f(2)-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$. ניקח $0<c<\frac{1}{M+1}$, $g(c)=f(c)-\frac{1}{c}<M-\frac{1}{\frac{1}{M+1}}=-1<0$. ולכן לפי משפט ערך הביניים יש נקודה בקטע $a\in[a,2]$ כך ש $g(c)=0$ כלומר $f(a)-\frac{1}{a}=0$ ולכן $f(a)=\frac{1}{a}$ כפי שרצינו.

3. הוכח שלכל פולינום ממעלה אי זוגית יש שורש ממשי.

הוכחה: יהיה $f=a_{2n+1}x^{2n+1}+\ldots+a_0$ פולינום ממעלה אי זוגית, רוצים להוכיח שקיים לו שורש ממשי, כלומר שקיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=0$. נחלק במקדם של המעלה הגבוהה ביותר לקבל $g=\frac{f}{a_{2n+1}}=x^{2n+1}+\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}x^{2n}+\ldots+\frac{a_0}{a_{2n+1}}$ (זה מותר כי המקדם של המעלה הגבוהה ביותר שונה מאפס לפי הגדרה). כעת, נראה שקיים ל g שורש, ולכן ברור שזה גם שורש של f.

$\lim_{x\to\infty}g(x)=x^{2n+1}\left(1+\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}x}+\ldots+\frac{a_0}{a_{2n+1}x^{2n+1}}\right)\to\infty$, ו

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=x^{2n+1}\left(1+\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}x}+\ldots+\frac{a_0}{a_{2n+1}x^{2n+1}}\right)\to-\infty$ וכמו שראינו בכיתה, נובע שיש נקודה ב g חיובית, ונקודה שבה היא שלילית. לפי משפט ערך הביניים היא מתאפסת, כלומר קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש $g(c)=0$, ולכן $f(c)=0$.

4. תן דוגמא לפונציה רציפה ב $(0,1]$ כך שאינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע ב $(0,1]$.
הוכח שהיא אכן כזו.

תשובה: לשם כך, נבחר פונקציה ששואפת לאינסוף בתחום הנ"ל ונכפול אותה בפונקציה שמחליפה סימן אינסוף פעמים בתחום. $f(x)=\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ מקיימת את תנאי השאלה. ברור שהיא רציפה בתחום, נראה שאינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע. ניקח את שתי הסדרות $x_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}, y_k=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$. ולכן $f(x_k)=\frac{\pi}{2}+2\pi k, f(y_n)=-(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)$ ולכן $f(x_k)\to\infty, f(y_k)\to-\infty$ ולכן הפונקציה אכן אינה חסומה מלעיל או מלרע.

5. הוכח שאם f רציפה במ"ש בקטע A אזי f רציפה בכל נקודה של A

הוכחה: תהי $a\in A$ נקודה בקטע. צריך להוכיח ש f רציפה ב a כלומר $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$ כלומר צריך להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.
אבל לפי רציפות במ"ש בקטע אנו יודעים שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. לכן בפרט אם a נקודה כלשהי בקטע, אז לכל נקודה אחרת x בקטע כך ש $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

שימו לב, שלקצוות הקטע (במקרה וזה קטע סגור) זה מראה שהגבולות החד צדדים שווים לערך הפונקציה בקצוות. כלומר אם $A=[c,d]$ אזי נובע מהכתוב לעיל ש $\lim_{x\to c^+}f(x)=f(c)$ ו $\lim_{x\to d^-}f(x)=f(d)$

6. תרגיל מודרך: תהי f רציפה במ"ש על (a,b) הוכח כי f חסומה על (a,b)
   a. נניח בשלילה ש f אינה חסומה, הראה שלכל $M>0$ קיימים x_1,x_2 כך ש $f(x_1)-f(x_2)>M$

הוכחה: ניקח x_2 כלשהו בקטע. אם f אינה חסומה, אזי לכל $M>0$ קיים x_1 כך ש $f(x_1)>M+f(x_2)$ לכן $f(x_1)-f(x_2)>M$.

   b. הראה שקיים $\delta>0$ כך שלכל $|x_1-x_2|<\delta$ בקטע, מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<1$

הוכחה: זה נובע ישירות מההגדרה של רציפות במ"ש עבור $\varepsilon=1$

c. נחלק את הקטע לקטעים שווים בגודל קטן מ δ. הסק שעבור $x_1,x_2\in(a,b)$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|$ קטן שווה ממספר הקטעים שחילקנו את הקטע אליהם.

הוכחה:נחלק את הקטע $[x_1,x_2]$ לחלקים קטנים מ δ כלומר נבחר נקודות $x_1,y_1,y_2,...,y_k,x_2$ כך ש $|y_1-x_1|,|y_2-y_1|,...,|y_k-y_{k-1}|,|x_2-y_k|<\delta$. ולכן

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(y_1)+f(y_1)-...+f(y_k)-f(x_2)|\le$$

$$\le|f(x_1)-f(y_1)|+|f(y_1)-f(y_2)|+...+|f(y_k)-f(x_2)|\le1+1+...1=k+1$$

d. הסק שיש סתירה בזכות כל הסעיפים, ולכן נובע מה שרצינו.

הוכחה: ניקח את δ מסעיף ב'. לכל זוג $x_1,x_2\in(a,b)$ ניתן לחלק את הקטע $[x_1,x_2]$ לקטעים שווים קטנים מ δ, כלומר אפשר לבנות מספר קטעים שקטן או שווה $\frac{b-a}{\delta}+1$ (אורך הקטע כולו חלקי אורך הקטעים הקטנים ועוד אחד [למקרי קצה]).

נבחר $M>\frac{b-a}{\delta}+1$, ולכן לפי סעיף א' קיימים x_1,x_2 כך ש $f(x_1)-f(x_2)>M$. אבל לפי סעיף ג', $|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{b-a}{\delta}+1<M$ בסתירה.

7. [שאלה ממבחן של פרופ' זלצמן] זהה וסווג את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

a. $\frac{1}{\log|x|}$

פתרון: זוהי חלוקה של פונקציות רציפות פרט לנקודה אפס בה הלוגריתם אינו מוגדר, לכן החלוקה רציפה כאשר $|x|\ne0$ וכאשר המכנה $\log|x|\ne0$ כלומר $x\ne\pm1$. נבדוק את סוגי אי הרציפות בנקודות אלו:

$x=0$: $\lim_{x\to0}\log|x|=-\infty$ לכן $\lim_{x\to0}\frac{1}{\log|x|}=0$ כלומר הגבול קיים וסופי ולכן זו נקודת אי רציפות סליקה.

$x=1$: עבור $\lim_{x\to1}\log|x|=0$ וגם עבור $x>1$ מתקיים $\log|x|>0$ לכן $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\log|x|}=\infty$ כלומר זו נקודת אי רציפות ממין שני.

$x=-1$: עבור $x>-1$ מתקיים $\log|x|<0$ לכן $\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\log|x|}=-\infty$ כלומר זו נקודת אי רציפות ממין שני.

$\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}$ .b

פתרון:

זו חלוקה של פונקציות רציפות בכל הממשיים, לכן נקודות אי הרציפות היחידות הינן הנקודות בהן המכנה מתאפס $\sin\sqrt{|x|}=0$. זה קורה אם"ם $\sqrt{|x|}=\pi k$ ולכן $x_k=\pm(\pi k)^2$ הם נקודות אי רציפות לכל k שלם.

עבור $k\neq 0$ מתקיים $x_k\neq 0$ ומתקיים שמצד אחד $\lim_{x\to x_k}\sin\sqrt{|x|}=0$ ולכן $\lim_{x\to x_k}\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}$ לא סופי אם קיים כי המונה שואף לקבוע שונה מאפס, ואילו המכנה שואף לאפס. (אם הגבול היה קיים וסופי ונניח שווה ל L אז היינו מקבלים ש $\frac{L}{x_k}=\lim_{x\to x_k}\frac{1}{\sin\sqrt{|x|}}$ וזה סתירה כי המכנה שואף לאפס). לכן זו אי רציפות ממין שני.

עבור $k=0$ מקבלים $x_k=0$. נבחן את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}\frac{|x|}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\sqrt{|x|}}\frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x|}}{|x|}=$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}}{\sin\sqrt{|x|}}\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\sqrt{|x|}$. מתקיים $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x|}}{\sin\sqrt{|x|}}=1$ לפי הרכבה של $\frac{x}{\sin x}$ על הפונקציה $\sqrt{|x|}$.

בנוסף $\frac{x}{|x|}$ חסומה ולבסוף $\sqrt{|x|}\to 0$.

ביחד זה אפס כפול חסומה ולכן הגבול כולו שווה לאפס ולכן זו נקודת אי רציפות סליקה.

$\left(2D(x)-1\right)^2$, כאשר $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ .c

פתרון:

בשאלה זו נפלה טעות, הגרסא הזו הופיעה במבחן המקורי. נפתור את שתי הגרסאות, קודם את זו:

כאשר $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\left(2D(x)-1\right)^2=(2-1)^2=1$

כאשר $x\notin\mathbb{Q}$ מתקיים $\left(2D(x)-1\right)^2=(0-1)^2=1$

ולכן $\left(2D(x)-1\right)^2$ היא בעצם הפונקציה הקבועה 1 לה אין נקודות אי רציפות כלל.

עבור השאלה שהופיע בבית $f(x)=2\left(D(x)-1\right)^2$:

יהי x_0 ממשי כלשהו. ניקח סדרה של רציונאלים $x_0 \neq x_n \to x_0$ וסדרה של אי רציונאליים $x_0 \neq y_n \to x_0$. לכן $f(x_n)=2(1-1)^2=0 \to 0$, וגם $f(y_n)=2(0-1)^2=2 \to 2 \neq 0$

ולכן לפי היינה לא קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ולכן זו נקודת אי רציפות ממין שני.

שימו לב שהוכחנו שכל הממשיים הם נקודות אי רציפות ממין שני של f .