תרגיל בית 1 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

שאלות המסומנות עם $(-)$ הן יותר קלות, ושאלות המסומנות עם $(+)$ הן יותר קשות.

תזכורת סימון מקוצר לסכום הוא

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

שאלה 1. $(-)$ הוכח את התכונה הבאה של סכומים סופיים:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}$$

שאלה 2. בתרגול ראינו את הפונקציה $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ברקורסיה באופן הבא: הבסיס: $f(0,0) = 1$. וכלל הרקורסיה:

$$f(n,m) = \begin{cases} 2f(n-1,m) & \forall n > 0, m \geq 0 \\ 3f(n,m-1) & \forall n \geq 0, m > 0 \end{cases}$$

הוכח כי $f(n,m) = 2^n 3^m$ לכל $n \geq 0, m \geq 0$ טבעיים. (רמז: השתמשו באינדוקציה כפולה: קבעו את אחד המשתנים כפרמטר, ועשו אינדוקציה על השני. בשלב הבא עשו אינדוקציה על המשתנה שקבעתם.)

שאלה 3. הוכח בעזרת אינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

שאלה 4. תהי המטריצה $M = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1-a & 1 \end{smallmatrix}\right)$, כאשר $a \in \mathbb{N}$ פרמטר כלשהו. הוכח בעזרת אינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 1-a^n & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 5. תהא סדרה המוגדרת לפי

$$a_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$$

הוכח באינדוקציה כי מתקיים

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{2n}{5n+1}$$

שאלה 6 (אי־שיוויון ברנולי)**.** יהי $x > 0$ מספר ממשי. הוכח כי לכל מספר טבעי $n \geq 2$ מתקיים $(1+x)^n > 1 + nx$.

שאלה 7. $(+)$ נגדיר סדרה באופן רקורסיבי לפי $a_0 = \sqrt{3}$, $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}$ עבור $n \in \mathbb{N}$.

1. הוכח באינדוקציה כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.
2. הוכח באינדוקציה כי הסדרה a_n חסומה מלמעלה: $a_n < \sqrt{3} + 1$ לכל n.

הערה קרא את ערכי ויקיפדיה על אוקלידס ועל קרל פרידריך גאוס.

בהצלחה!