

# תרגיל בית 1 באלגברה מתקדמת

## 83-804 סמסטר א' תש"ף

### שאלות להגשה

**שאלה 1.** בכל סעיף, ענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:  
האם היא אגודה?  
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?  
האם היא חבורה?  
האם הפעולה היא חילופית?

- א.  $(\mathbb{N}, \cdot)$ , המספרים הטבעיים עם פעולת הכפל הרגילה.  
 ב.  $(\mathbb{Z}, \max)$ , המספרים השלמים עם הפעולה של בחירת המקסימום.  
 ג.  $(\mathbb{N}, *)$ , המספרים הטבעיים עם הפעולה  $a * b = a + b - 1$ .  
 ד. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

- ה.  $(A, \cdot)$ , הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.  
 ו.  $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$ , המספרים הרציונלים בלי  $-1$  עם הפעולה  $a * b = a + b + ab$ .  
**שאלה 2.** תהינה  $(G, *)$  ו- $(H, \bullet)$  חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית  $G \times H$  פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

לכל  $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$ .

א. הוכיחו כי  $G \times H$  עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של  $G$  ו- $H$ .

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה  $G \times H$  אבליית אם ורק אם  $G$  ו- $H$  אבליות.

**שאלה 3.** תהי  $G$  חבורה. הוכיחו כי  $G$  אבליית אם ורק אם לכל  $a, b \in G$  מתקיים כי  $(ab)^2 = a^2b^2$ .

**שאלה 4.** תהי  $S$  אגודה. הוכיחו שאפשר להרחיב אותה למונואיד שאיבריו  $M = S \cup \{e\}$  עם איבר חדש  $e \notin S$  כשהפעולה היא הרחבה של הפעולה של  $S$  באופן כזה ש- $e$  הוא איבר היחידה במבנה החדש. (יש להראות שהפעולה במבנה החדש היא קיבוצית).

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 5.** יהי  $M_0 = \{e_0\}$  מונואיד האפס שבו יש רק איבר אחד. תארו את הפעולה במונואיד המתקבל מחזרה של  $n$  פעמים על הבנייה מהשאלה הקודמת. כלומר עבור  $i > 0$  נגדיר מונואיד  $M_i = M_{i-1} \cup \{e_i\}$  שבו  $e_i$  הוא איבר היחידה החדש ואתם מתבקשים לומר כיצד נראה לוח הכפל של  $M_n$ . האם הפעולה חילופית?

בהצלחה!