88524 – דף תרגילים 6

1. נסתכל על קבוצת ההעתקות הפרוייקטיביות מהישר הפרוייקטיבי RP^1 לעצמו אשר שומרות על הקבוצה $\{0,1,\infty\}$ (ז"א: לכל $x\in\{0,1,\infty\}$ מתקיים $f(x)\in\{0,1,\infty\}$).

א. לאיזו חבורה איזומורפית קבוצת ההעתקות הנ"ל? הוכיחו איזומורפיזם.

ב. כמה העתקות פרוייקטיביות כאלו ישנן? מצא את כולן (כלומר רשמו את צורתן המפורשת: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$).

ג. כתבו את המטריצות המתאימות להעתקות אלו ב $PSL_2(R)$.

2. יהיה C מעגל ב- R^2, עם רדיוס 5, שמרכזו בראשית. מצאו את משוואת הישר הפולרי לנקודה P ביחס ל-C כאשר:

א. P=(3,4)

ב. P=(2,2)

3. יהי C מעגל. משולש נקרא דואלי לעצמו אם כל קודקוד הוא פולרי לצלע שמולו ביחס לC.
יהי ABD משולש דואלי לעצמו.

א. הוכיחו שמרכז המעגל הוא חיתוך גבהי המשולש.

ב. הוכיחו כי אחד מקודקודי המשולש הוא בהכרח בתוך המשולש והשניים האחרים מחוץ לו.

ג. ציירו ציורים מתאימים ל-א' ו-ב'.

4. יהי C מעגל ש-O מרכזו.

א. מהו הישר הפולרי ל-O ב- RP^2?

ב. בהנחה ש- {z=0} מייצג את הישר באינסוף במישור הפרוייקטיבי RP^2, תהיינה B,A שתי נקודות שונות על ישר זה, ויהיו a,b הישרים הפולרים המתאימים להן. מהי נקודת החיתוך של a ו-b?

4. יהי C מעגל שמרכזו M ו-P נקודה שאינה על C השונה מ-M. תהיינה Y,X נקודות על C כך ש-

1. זוית PMX שווה זוית PMY

2. הישר PX חותך את המעגל C בנקודה נוספת: 'X

3. הישר PY חותך את המעגל בנקודה נוספת: 'Y.

נגדיר $Q=XY'\cap X'Y, R=XY\cap X'Y'$.

הוכיחו: א. $QR\perp PM$. ב. אם Q בתוך המעגל אז R,P מחוץ לו (הסתמכו על תכונות ידועות של הישר הפולרי).

<u>הגדרה:</u> יהי p ישר ו-C חתך חרוט. הנקודה P אשר הישר p הוא הפולרי לה נקרא קוטב של p .

5. כזכור, הישר הפולרי לנקודה P (מחוץ ל-C) הוגדר בעזרת העבר שני ישרים דרך P החותכים את המעגל בנקודות: X,X',Y,Y' . בנו את הבניה הדואלית לכך כאשר המקביל הדואלי לנקודה על המעגל הוא משיק בנקודה זו, ז"א: יהי p ישר (החותך את המעגל בשתי נקודות). בנו את הקוטב ל-p ע"י בחירת שתי נקודות על p ו-4 משיקים מהן למעגל.