מערך תרגול מס' 3

28 בנובמבר 2012

1 תתי חבורות

הגדרה 1.1 תהי $(G,*)$ חבורה. עבור $\emptyset \neq H \subseteq G$ אנו אומרים ש H היא תת־חבורה של G ומסמנים $H \leq G$, אם:

1. H סגורה ביחס ל $*$.
2. לכל $g \in H$, $g^{-1} \in H$.

דוגמאות:

1. נסמן $n\mathbb{Z} = \{z : n \mid z\}$. זוהי תת־חבורה של $\mathbb{Z}$.
2. באופן דומה נגדיר $m\mathbb{Z}_n$, כתת־קבוצה של איברי $\mathbb{Z}_n$ ששקולים לאיזהשהו איבר ב $\mathbb{Z}_n$.
3. עבור יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהו, $n \in \mathbb{N}$. אנו נגדיר $SL_n(\mathbb{F})$ כאוסף של כל המטריצות שהדטרמיננטה שלהם היא 1. אזי $SL_n(F)$ היא תת־חבורה של $GL_n(F)$.
4. תהי G חבורה, $g \in G$. נגדיר $< g >= \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$. זוהי תת־חבורה של G.
5. תהי G חבורה, $H, K \leq G$ תתי חבורות שלה. אזי $H \cap K$ היא תת־חבורה של G.

הגדרה 1.2 תהי G חבורה, $g \in G$. $|< g >|$ נקרא סדר של איבר.

תרגיל: מצא את סדר של 5 ב $\mathbb{Z}_{17}$.

פתרון: אנו נראה, שכל איבר ב $\mathbb{Z}_{17}$, הוא חזקה של 5. יהי $0 < a, b < 17$. נניח $[a \cdot 5] = [b \cdot 5]$. אזי $5a \equiv 5b \pmod{17}$. אזי $5(a-b) \equiv 0 \pmod{17}$. אבל $5 \cdot 17 = [5, 17]$ כי 5, ו 17 זרים. אבל $|a-b| < 17$. לכן $a - b = 0$. כלמר, לכן משיקולי עוצמה לכל $0 \leq a < 17$ קיים b כך ש $[a \cdot 5] = [b]$. לכן $< 5 >=< 1 >$.

הגדרה 1.3 תהי G חבורה, אם קיים $g \in G$ כך ש $G =< g >$ אנו נאמר ש g ציקלית.

תרגיל: הוכח, כל תת־חבורה של $\mathbb{Z}$ הינה ציקלית.

פתרון: תהי $H \leq \mathbb{Z}$ תת־חבורה של $\mathbb{Z}$. אם $H = \{0\}$ אזי היא ציקלית על פי ההגדרה. אחרת נתבונן ב $H \cap \mathbb{N}$. זוהי קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים. לפי עקרון הסדר הטוב, היא מכילה איבר מינימלי d. אנו נוכיח, ש $H =< d >$. נניח בשלילה שלא. אזי קיים $m \in H$ כך ש m אינו כפולה של d. אזי $(d, m) < d$. כמו כן $(d, m) \in H$, בסתירה למינימליות של d ב H.

תרגיל: הוכח: כל תת־חבורה של $\mathbb{Z}_n$ היא ציקלית. באילו מקרים זו תהיה תת־חבורה ממש?

הגדרה 1.4 תהי G חבורה, $H \subset G$. נתבונן ב $\cap_{H \subset G' \leq G} G'$. זו חבורה, והיא נקראת חבורה הנוצרת על ידי H. אפיון נוסף של תת־חבורה זו הוא אוסף כל המכפלות הסופיות של איברים ב H והופכיהן.

2 קוסטים

הגדרה 2.1 תהי G חבורה, $H \leq G$. עבור $g \in G$, אנו מסמנים $gH := \{gh : h \in H\}$, $Hg := \{hg : h \in H\}$. הקבוצות מסוג gH נקראות קוסטים שמאליים של H, והקבוצות מסוג Hg נקראות קוסטים ימניים של H.

כל תת־חבורה Hשל G מגדירה יחס שקילות על G המוגדר באופן הבא: $g \sim h \Leftrightarrow hg^{-1} \in H$.

משפט 2.2 $gH = hH \Leftrightarrow h \sim g$.

תרגיל: יהי $\mathbb{F}$שדה, $n \in \mathbb{N}$. אנו מגדירים $SL_n(\mathbb{F}) := \{A \in GL_n(\mathbb{F}) | det(A) = 1\}$

1. $SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F})$
2. אפיין את כל הקוסטים השמאליים של $SL_n(F)$.

משפט 2.3 לכל שני קוסטים gH, hH מתקיים: או $gH \cap hH = \emptyset$ או $gH = hH$.
עוצמה של כל 2 קוסטים שווה זו לזו.

הגדרה 2.4 תהי G חבורה, $H \leq G$. האינדקס השמאלי של H, מוגדר כמספר הקוסטים השמאליים של H ומסומן $[G : H]$.

משפט 2.5 מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.

מהמשפט נובע שאפשר לדבר על אינדקס של חבורה, בלי לציין "שמאלי" או "ימני".

משפט 2.6 תהי G חבורה סופית, $H \leq G$. אזי $[G : H] \cdot |H| = |G|$.

3 דוגמאות נוספות של חבורות

3.1 מכפלה קרטזית של חבורות

תהיינה $(G, *), (H, \$)$ חבורות. אנו נגדיר את החבורה $(G \times H, \cdot)$ באופן הבא:
האיברים של החבורה הם האיברים של מכפלה הקרטזית $G \times H$, והפעולה $\cdot$ מוגדרת באופן הבא: $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \$ h_2)$. נבדוק שזוהי חבורה.

1. $g_1 * g_2 \in G$, $h_1 \$ h_2 \in H$, לכן $(g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \$ h_2) \in G \times H$, לכן יש סגירות.

2. אסוציאטיביות:

$$\begin{aligned}(g_1,h_1)\cdot((g_2,h_2)\cdot(g_3,h_3)) &= (g_1,h_1)\cdot(g_2*g_3,h_2\$h_3)= \\ =(g_1*g_2*g_3,h_1\$h_2\$h_3) &= (g_1*g_2,h_1\$h_2)\cdot(g_3,h_3) \\ &= ((g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2))\cdot(g_3,h_3)\end{aligned}$$

3. איבר יחידה. ברור ש $(1_G,1_H)$ הוא איבר היחידה של החבורה.

4. הפיך: יהי $(g,h)\in G\times H$, אזי $\left(g^{-1},h^{-1}\right)$ הוא ההפיך שלו.

תרגיל: תהיינה G_1,G_2 חבורות, $H_1\le G_1,H_2\le G_2$. הוכח, $H_1\times H_2$ היא תת־חבורה של $G_1\times G_2$.

פתרון: לפי קריטריון המקוצר של תת־חבורה מספיק לבדוק שלכל $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in H_1\times H_2$, $(a_1,a_2)(b_1,b_2)^{-1}\in H_1\times H_2$. אבל $(b_1,b_2)^{-1}=\left(b_1^{-1},b_2^{-1}\right)$. כמו כן, מתקיים $(a_1,a_2)\left(b_1^{-1},b_2^{-1}\right)=\left(a_1b_1^{-1},a_{2,}b_2^{-1}\right)$. $a_1b_1^{-1}\in H_1$, $a_2b_2^{-1}\in H_2$ ע"פ קריטריון מקוצר לתתי חבורות. לכן $\left(a_1b_1^{-1},a_2b_2^{-1}\right)\in H_1\times H_2$.

תרגיל: הוכח/הפרך, כל תת־חבורה של $G_1\times G_2$ היא מהצורה $H_1\times H_2$.

פתרון: הפרכה: תהי $H=\{(k,k):k\in\mathbb{Z}\}$ תת חבורה של $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ היא אינה מהצורה $mZ\times n\mathbb{Z}$, (כל תתי החבורות של $\mathbb{Z}$ הן מהצורה $n\mathbb{Z}$). אחרת $(0,n)\in H$ ו $(m,0)\in H$, אבל זה לא מתקיים כי הם לא מהצורה (k,k).

3.2 חבורה הסימטרית

תזכורת: S_n היא קבוצת הפונקציות ההפיכות מ $\{1,\dots,n\}$לעצמה. (במילים אחרות - קבוצת הפונקציות החח"ע ועל).

3.2.1 הצגה כטבלה

כל תמורה σ ניתן להציג בטבלה בת 2 שורות, כאשר בשורה הראשונה אנו רושמים את $1,\dots n$ ובשורה השמיה אנו רושמים שת $\sigma(1),\dots,\sigma(n)$. למשל התמורה σ על $\{1,\dots 4\}$ המוגדרת על ידי $\sigma(4)=1,\sigma(3)=2,\sigma(2)=3,\sigma(1)=4$ נרשום כ $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$.

3.2.2 מחזורים

אנו נפתח דרך אחרת להציג תמורות.

הגדרה 3.1 תהי $\{x_1,\dots,x_m\}$המוכלת בתוך $\{1,\dots n\}$. $(m\le n)$. תמורה $f=(x_1x_2\dots x_m)$ שפועלת על ידי $f(x_1)=x_2,\dots f(x_{m-1})=f(x_m),f(x_m)=x_1$ נקראת מחזור. הקבוצה $\{x_1,\dots,x_m\}$נקראת תומך של מחזור. המספר m מוגדר להיות אורך של מחזור. הצגה של מחזור איננה יחידה, מפני שניתן להתחיל מ־x_2, לדוגמא.

הערה 3.2 תמורת הזהות היא תמורה מאורך 1, ומסומנת (x) (לא משנה איזה איבר זה).

דוגמה: $(135) \in S_5$ היא התמורה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

הגדרה 3.3 מחזורים $(x_1, \ldots, x_k)$ ו $(y_1, \ldots y_m)$ נקראים זרים אם התומכים שלהם זרים.

3.2.3 הכפלה של מחזורים

כפל מחזורים מוגדר כהרכבה הרגילה של פונקציות.

דוגמא: $(13)(23) = (132)$.

הסבר: $(23)[1] = 1 \Leftarrow 3 = (13)[1] = [1](13)(23)[1]$. כלמר $1 \mapsto 3$. באופן דומה, על 3 הולך $3 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$.

דוגמא: $(134)(1576)$ על ידי הרכבה חוזרת של פונקציות מקבלים: $1 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 1 \mapsto 6 \mapsto 7$. המחזור שמתקבל (134576).

3.2.4 כל תמורה ניתן להציג כמכפלה של מחזורים

משפט 3.4 מחזורים זרים מתחלפים בינהם.

כל מחזור ניתן להציג כמפלה של תמורות. למשל: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

$(1\,3\,2\,5\,4)(6)(7)(8\,9\,10)$