$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$ לסימון קודם

סימפסון הכללי: $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)\right]$$

אומדן לשגיאה:

כאשר יש 3 נק' ~~n=2~~ → $$\boxed{E^{(1)} = \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \left|f^{(4)}(\xi)\right|}$$

$n=2$ "

למקרה הכללי → $$\boxed{E^{(2)} = \frac{k_4 (b-a)^5}{180\, n^4} = \frac{k_4 (b-a)}{180} h^4 \qquad k_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|}$$

0   0.5   1

נחשב את $$I = \int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

$$I \approx \frac{(1-0)}{6}\left[e^0 + 4e^{0.25} + e^1\right] = 1.47573$$

$$f^{(4)} = 4(4x^4 + 12x^2 + 3)e^{x^2}$$

הפונ' עולה ולכן המקסימום יתקבל ב- $x=1$

$$E = \frac{1}{180}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \underbrace{206.58}_{k_4} \approx 0.0773$$

$$O(h^2) \begin{cases} I_1: & h_1 & E_1 \\ I_2: & h_2 = \frac{h_1}{2} & E_2 = \frac{E_1}{2^2} = \frac{E_1}{4} \end{cases}$$

$$O(h^4) \qquad I_4: \quad h_4 = \frac{h_1}{2} \qquad E_4 = \frac{E_1}{2^4} = \frac{E_1}{16}$$

אינטגרציה אינטרפולטיבית

מבוססת על ביצוע האינטגרציה של פולינום האינטרפולציה.

נניח כי נתונה פונקציה f אשר פולינום האינטרפולציה. הנו

מתבטא:

$$p_n = \sum_{j=0}^{n} f_j\, l_j(x)$$

כאשר l_j הן פונקציות לגרנז'.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \approx \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{n} f_j \cdot l_j(x)\right] w(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \underbrace{\int_a^b l_j(x)\cdot w(x)}_{A_j \text{ מקדמים}} \approx \sum_{j=0}^{n} f_j A_j$$

<u>יתרון</u>

ה- A_j אינם משתנים עבור פונקציות שונות. מספיק לחשב אותם פעם אחת

<u>דוגמא:</u>

חשב את $\int_0^2 f(x)\cdot dx$ כאשר נתונה באמצעות הטבלה הבאה:

x	0	1	2
f	1	3	7

פתרון: ראשית נמצא את l_0, l_1, l_2.

$$l_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$l_1 = \frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$l_2 = \frac{x(x-1)}{2}$$

נתון $w(x) = 1$

$$A_0 = \int_0^2 l_0(x)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$A_1 = \int_0^2 l_1(x)\,dx = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_0^2 l_2(x)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx \approx 1\cdot A_0 + 3\cdot A_1 + 7\cdot A_2 = \frac{20}{3}$$

$$1\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{4}{3} + 7\cdot\frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

<u>דוגמא</u>: נמצא קירוב לאינטגרל

N - דרגת דיוק

עם דיוק מסדר 5

$N = 2n-1$ $\quad$ $2n-1=5$

$2n=6 \Rightarrow n=3$

$n=3 \Rightarrow$ נשתמש בפולינום לג'נדר P_3

$$P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

ה-y-ים המתאימים

$$y_1 = \frac{5}{8}, \quad y_2 = 1$$

$$y_3 = \frac{5}{8}$$

x	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
y	$\frac{5}{8}$	1	$\frac{5}{8}$

$y \leftarrow$ לפי הפו' המקורית

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-0)\left(x-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(-\sqrt{3/5}-0\right)\left(-\sqrt{3/5}-\sqrt{3/5}\right)} = \frac{5}{6}\left(x^2-\sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right)$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{5}{3}\left(x^2-3\right)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{5}{6}\left(x^2+\sqrt{3/5}\,x\right)$$

[illegible]

$$A_1 = w_1(x) = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1} 1\cdot\left(x^2-\sqrt{3/5}\,x\right) dx = \frac{5}{9}$$

$$A_2 = w_2(x) = \int_{-1}^{1} 1\cdot\left[-\frac{5}{3}\left(x^2-3\right)\right] dx = \frac{8}{9}$$

$$A_3 = w_3(x) = \int_{-1}^{1} 1\cdot\frac{5}{6}\left(x^2+\sqrt{\frac{3}{5}}\,x\right) dx = \frac{5}{9}$$

[illegible] ? כל [illegible]

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\cdot\frac{5}{9} + f(0)\cdot\frac{8}{9} + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\cdot\frac{5}{9}$$

$$\Longrightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt \approx \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9} + 1\cdot\frac{8}{9} + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9} = 1\,\frac{7}{12}$$

17.1.2013

תרגול מס' 10 ואחרון.

אינטגרציה אינטרפולטיבית

גאוס לג'נדר

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

דרגת דיוק

N – דרגת דיוק אלגברית (מס' ספרות משמעותיות)

n – דרגת ~~...~~ = דרגת הפול.

ראינו דוגמא: עבור $n=3$ $(N=5)$

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{3/5}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)\right]$$

הערה ניתן להכליל את השיטה לקטע כללי $[a,b]$

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\Big(\underbrace{\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t}_{x_i}\Big)\,dt =$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i}_{c_i} f(x_i)$$

כאשר $x_i = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{(b-a)}{2}\underbrace{t_i}_{\text{שורשי פולינום לג'נדר}}$ $i=1,2,3,\dots,n$

השגיאה נתונה בעזרת הנוסחה הבאה.

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}\cdot (n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}\left|f_t^{(2n)}(\xi)\right|$$

הערה ξ הינה הנק' הפנימית בתוך קטע האינטגרל שעבורה $f^{(2n)}$ הינה מקסימלית.

בלק מה

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\, dx$$

$f = \sqrt{1+2x}$

בדרגה פולינום נבחר אם $n=3 \Leftarrow N = 2n-1 = 5$.

$(0,-1)$

$(1,1)$

$m = \frac{2}{1}$

$t+1 = 2\cdot(x-$

$t = 2x-1$

$t+1 = 2x$

$x = \frac{t+1}{2}$

$f(t) = \sqrt{1+\frac{t+1}{2}}$

$a = 0 \,, \quad b = 1$

$$P_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2}$$

$$t_1 = -\sqrt{\tfrac{3}{5}} \,, \quad t_2 = 0 \,, \quad t_3 = \sqrt{\tfrac{3}{5}}$$

$$x_i = \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot t_i$$

$F(t)$

$= \sqrt{1+$

$= \sqrt{t$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t_1 = 0.11270$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = 0.88730$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2} A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0.27778$$

$$c_2 = \frac{b-a}{2} A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} = \frac{8}{18} = 0.44444$$ [illegible] 5 ספרות

$$c_3 = \frac{b-a}{2} A_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18} = 0.27778$$

$$I = \sum_{i=1}^{3} c_i \cdot f(x_i)$$

i	x_i	מחשבון y_i $f(x_i)$	c_i	$c_i y_i$
1	0.11270	1.10698	0.27778	0.30747
2	$\frac{1}{2}$	1.41421	0.44444	0.62853
3	0.88730	1.66571	0.27778	0.46270

$$\sum_{i=1}^{3} c_i y_i = 1.39870$$

$$n=3 \Longrightarrow R_3 = \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 \max_{0\le\xi\le1}\left|f^{(6)}(\xi)\right| = \frac{945}{15750}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2000}$$: [illegible]

$$f(x) = (1+2x)^{1/2} \,, \quad f^{(6)} = -945(1+2x)^{-11/2} \,, \quad \max_{0\le\xi\le1} |f(\xi)| = 945$$