גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית $88-202$
פתרון מבחן מועד א' סמסטר ב' תשע"ג

20 באוגוסט 2014

1. נתון מיפוי כלשהו $r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

(א) הוכיחו כי מטריצת המטריקה g חיובית לחלוטין.

(ב) בטאו את g_{12} באמצעות הביטויים $\frac{\partial r^i}{\partial u^j}$.

פתרון

(א)

$$\begin{aligned} g &= dr^t dr \\ v^t g v &= v^t dr^t dt v = ||dr\, v||^2 \end{aligned}$$

כיוון שאנו דורשים שg מדרגת שורות מלאה אז $dr\, v=0 \Leftrightarrow v=0 \Leftarrow$
$v=0\Leftrightarrow v^t g v=0$

(ב)

$$\begin{aligned} dr &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial u^1} & \frac{\partial r^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial r^2}{\partial u^1} & \frac{\partial r^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial r^3}{\partial u^1} & \frac{\partial r^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \\ g_{12} &= \left(dr^t dr\right)_{12} = \frac{\partial r^1}{\partial u^1}\frac{\partial r^1}{\partial u^2}+\frac{\partial r^2}{\partial u^1}\frac{\partial r^2}{\partial u^2}+\frac{\partial r^3}{\partial u^1}\frac{\partial r^3}{\partial u^2} \end{aligned}$$

2. עקומים ב$\mathbb{R}^2$:

(א) נתון העקום $\gamma=(\sin kt,\cos nt)$ עבור k,n טבעיים (ושונים מ0). מה התנאי על k,n כך שהעקום יהיה רגולרי.

(ב) מהו העקום המתואר (בחלקו) ע"י $\gamma=(\sin 2t,\cos t)$?

(ג) מהו עקמומיות העקום $\gamma=(\sin 2t,\cos t)$ (כפונקציה של t)?

פתרון

(א)

$$||\gamma'|| \neq 0$$

לא רגולרי או"א $(\sin kt)' = 0 \wedge (\cos nt)' = 0$

$$\begin{aligned}
(\sin kt)' &= 0 \wedge (\cos nt)' = 0 \\
k\cos kt &= 0 \wedge -n\sin nt = 0 \\
\cos kt &= \sin nt = 0 \\
\sin nt = 0 &\Leftrightarrow nt = \pi N_1 \\
\cos kt = 0 &\Leftrightarrow kt = \frac{\pi}{2} + \pi N_2 \\
\frac{\pi\left(N_2 + \frac{1}{2}\right)}{k} &= \frac{\pi N_1}{n} \Rightarrow \frac{n}{k} = \frac{2N_1}{2N_2+1}
\end{aligned}$$

אם בהצגת $\frac{n}{k}$ כשבר מצומצם המונה זוגי והמכנה אי זוגי אז העקום לא רגולרי, אחרת הוא רגולרי.

(ב)

$$\begin{aligned}
x &= \sin 2t = 2\sin t\cos t \\
x &= \pm 2y\sqrt{1-y^2} \\
x^2 &= 4y^2\left(1-y^2\right)
\end{aligned}$$

(ג)

$$\begin{aligned}
\gamma' &= (2\cos 2t, -\sin t) \\
\gamma'' &= (-4\sin 2t, -\cos t) \\
k &= \frac{\det\left(\gamma'|\gamma''\right)}{||\gamma'||^3} = \frac{-2\cos t\cos 2t - 4\sin t\sin 2t}{\left(4\cos^2 2t + \sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

3. נתון ההיפרבולואיד $(\cosh v\cos\theta, \cosh v\sin\theta, \sinh v)$.

(א) חשבו את התבנית הראשונה.

(ב) חשבו את מקדמי כריסטופל.

(ג) הוכיחו כי המעגל $x^2+y^2=1$ במישור $z=0$ הוא קו גאודזי על פני ההיפרבולואיד.

פתרון

(א)

$$\begin{aligned} dr &= \begin{pmatrix} \sinh v\cos\theta & -\cosh v\sin\theta \\ \sinh v\sin\theta & \cosh v\cos\theta \\ \cosh v & 0 \end{pmatrix} \\ g &= dr^t dr \\ &= \begin{pmatrix} \overbrace{\sinh^2 v+\cosh^2 v}^{g_1=\cosh 2v} & 0 \\ 0 & g_2=\cosh^2 v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ב) אם g אלכסונית אז

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{g_{1,1}}{2g_1} & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{g_{1,2}}{2g_2} \\ \Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1 &= \frac{g_{1,2}}{2g_1} & \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2 &= \frac{g_{2,1}}{2g_2} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{g_{2,1}}{2g_1} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{g_{2,2}}{2g_2} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{2\sinh 2v}{2\cosh 2v} = \tanh 2v$$

(ג)

$$z=0 \Rightarrow \sinh v = 0 \Rightarrow v=0$$

$$\begin{aligned} \cos^2\theta+\sin^2\theta &= 1 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

משוואות הקו הגאודזי:

$$\begin{aligned} \ddot v+\Gamma_{11}^1\dot v^2+2\Gamma_{21}^1\dot v\dot\theta+\Gamma_{22}^1\dot\theta &= 0 \\ \ddot\theta+\Gamma_{11}^2\dot v^2+2\Gamma_{12}^2\dot v\dot\theta+\Gamma_{22}^2\dot\theta &= 0 \end{aligned}$$

דרך $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} v(s) &= 0 \\ (\cos\theta(s),\sin\theta(s),0) \\ T &= \left(-\dot\theta\sin\theta,\dot\theta\cos\theta,0\right) \\ T^2 &= 1 \\ \dot\theta^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right) &= 1 \\ \dot\theta &= \pm 1 \end{aligned}$$

אפשר גם דרך המטריקה על היריעה $\dot{\theta}^2 g_{vv} + 2\dot{v}\dot{\theta} g_{v\theta} + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = 1$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \ddot{v} = 1 \\ \dot{\theta} &= 1 \quad , \ddot{\theta} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 + \Gamma^1_{22} 1^1 &= 0 \\ 0 + 0 + 0 + \Gamma^2_{22} 1^1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22}\big|_{v=0} &= -\frac{g_{2,1}}{2g_2}\bigg|_{v=0} = \frac{\sinh v}{2\cos 2v}\bigg|_{v=0} = 0 \\ \Gamma^2_{22}\big|_{v=0} &= -\frac{g_{22}}{2g_2}\bigg|_{v=0} = 0 \end{aligned}$$

ולכן המשוואות מתקיימות עבור המסלול הנ"ל.

4. תהי α עקומה פרמטרית, הנתונה ע"י

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$$

(א) מצאו פרמטריזציה טבעית, $\alpha(s)$עבור העקומה.

(ב) חשבו את העקמומיות והפיתול של $\alpha(s)$.

(ג) חשבו את אורך העקומה $\alpha(t)$ בטווח הפרמטר $0 \le t \le 2\pi$.

פתרון

(א)

$$\begin{aligned} \alpha' &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) \\ ||\alpha'||^2 &= \frac{1}{3}\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t\cos t \\ &\quad + \frac{1}{3}\sin^2 t + \frac{1}{3}\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t\cos t \\ &= 3\cdot\frac{1}{3}\sin^2 t + 2\cdot\frac{1}{2}\cos^2 t = 1 \\ s &= t \\ s &= \int_0^t ||\alpha'(u)||\, du \end{aligned}$$

(ב) עקמומיות ופיתול

$$\begin{aligned}
\dot{T} &= \kappa\hat{N}\\
\left|\left|\dot{T}\right|\right| &= \kappa\left|\left|\hat{N}\right|\right| = \kappa\\
\dot{T} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t,-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\\
\left|\left|\dot{T}\right|\right|^2 &= 1\\
\Rightarrow\kappa &= 1
\end{aligned}$$

(שימו לב כי זה מקיים $x+z-2y=0$)

$$\begin{aligned}
\dot{N} &= -\kappa\hat{T}+\tau\hat{B}\\
\dot{N}+\kappa\hat{T} &= \tau\hat{B}\\
\left|\left|\dot{N}+\kappa\hat{T}\right|\right| &= \left|\left|\tau\hat{B}\right|\right| = |\tau|\\
\hat{N} &= \frac{\dot{T}}{\left|\left|\dot{T}\right|\right|} = \dot{T}\\
\dot{N} &= \ddot{T}\\
\ddot{T}+\kappa T &= \ddot{T}+T = 0\\
\Rightarrow\tau &= 0
\end{aligned}$$

(ג) 2π כי העקומה בפרמטריזציה טבעית.

$$\int_0^{2\pi}||\alpha'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi}$$

5. יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ המשטח הנתון ע"י המשוואה $z=xy$.

(א) מצאו פרמטריזציה רגולרית, $r(u,v)$ עבור M.

(ב) חשבו את התבנית היסודית הראשונה.

(ג) רשמו את המשוואות הגאודזיות עבור הקואורדינטות u,v (אין צורך לפתור אותן).

פתרון

(א)

$$\begin{aligned}
u &= x\\
v &= y\\
z &= uv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r(u,v) &= (u,v,uv) \\
dr &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(ב)

$$g = dr^t dr = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

(ג)

$$
\begin{aligned}
\det g &= \left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right) - u^2v^2 \\
g^{-1} &= \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)-u^2v^2}\begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11,1} = 0 \qquad & g_{12,2} = g_{21,2} = 4 \\
g_{11,2} = 2v \qquad & g_{22,1} = 2u \\
g_{12,1} = g_{21,1} = v \qquad & g_{22,2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}\left(\overbrace{g_{11,1}+g_{11,1}-g_{11,1}}^{0+0-0}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(\overbrace{g_{12,1}+g_{21,1}-g_{11,2}}^{v+v-2v}\right) = 0 \\
\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11,2}+g_{21,1}-g_{12,1}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(g_{12,2}+g_{22,1}-g_{21,2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2v\left(1+u^2\right)}{1+u^2+v^2} - \frac{2u\cdot uv}{1+u^2+v^2}\right) \\
&= \frac{v}{1+u^2+v^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 &= 0 \\
\ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 &= 0
\end{aligned}
$$