שאלון סגור

בס"ד
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מספר הקורס :83-115-01
מרצה : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'
מתרגלים : זהבית צבי, רואי אסרף
סמסטר ב', מועד א' : ח'תמוז, התשע"ו (14.07.2016)
משך הבחינה : שלוש שעות

חומר עזר : 3 דפים חד-צדדיים של A4 , מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)

ניקוד : במבחן אפשר לצבור **100 נקודות**.

יש לפרט שלבי החישוב נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.

בחירה של 5 שאלות מתוך 6

בהצלחה!

שאלה 1. (20 נקודות)

נתונה המשוואה

$$x^2 y' + 2xy = y^3,\ x > 0$$

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה;

ב. מצאו את הפתרון הפרטי של המשוואה הנ"ל המקיים את התנאי $y(1) = 1$;

ג. האם משפט הקיום והיחידות מבטיח פתרון המקיים $y(0) = 1$?

פתרון: א) נחלק ב- x^2 (כי $x \neq 0$):

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2} y^3 .$$

זו מד"ר ברנולי עם $n = 3$. נציב $z = y^{1-n} = y^{-2}$ כלומר $y = z^{-1/2}$ ונקבל

$y' = -\frac{1}{2} z^{-3/2} \cdot z'$. נציב:

$$-\frac{1}{2} z^{-3/2} \cdot z' + \frac{2}{x} z^{-1/2} = \frac{1}{x^2} z^{-3/2}$$

ונכפיל ב- $-2z^{3/2}$:

$$. z' - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^2}$$

כאן $p(x) = -\frac{4}{x}$ ולכן נכפיל ב- $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$:

$$\frac{1}{x^4}z' - \frac{4}{x^5}z = -\frac{2}{x^6}$$

$$\left(\frac{1}{x^4}z\right)' = -\frac{2}{x^6}$$

$$\frac{1}{x^4}z = -\int \frac{2}{x^6}dx = -2\frac{x^{-5}}{-5} + C = \frac{2}{5x^5} + C$$

$z = \frac{2}{5x} + Cx^4$. גורר $y = z^{-1/2} = \left(\frac{2}{5x} + Cx^4\right)^{-1/2}$.

ב) נציב את תנאי ההתחלה

$$1 = y(1) = \left(\frac{2}{5} + C\right)^{-1/2} \Rightarrow \frac{2}{5} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{5}.$$

לכן,

$$y = \left(\frac{2}{5x} + \frac{3}{5}x^4\right)^{-1/2} \quad .$$

ג)במקרה זה המשוואה ניתנת לכתיבה בצורה קנונית בצורה:

$$. y' = -\frac{2}{x}y + \frac{1}{x^2}y^3 = f(x,y).$$

נשתמש במשפט הקיום והיחידות למד"ר כללי מסדר ראשון מהצורה $y' = f(x,y)$.
מכיוון ש- $f(x,y)$ אינה רציפה ב- $x=0$, משפט הקיום והיחידות לא מבטיח פתרון עם תנאי התחלה הנתון בנקודה $x=0$.

שאלה 2

א. מצאו את הצורה הכללית בה יש לחפש פתרון פרטי למשוואה $y''' + 4y'' + 4y' = -4x + 2 - 3e^{-2x}\sin x + \left(5x + \sqrt{\pi}\right)e^{-2x}$ לפי שיטת המקדמים הלא ידועים (אין צורך למצוא את המקדמים עצמם) ;

ב. ידוע ש- $y_1(x) = x$ ו- $y_2(x) = \frac{1}{x}$ הם שני פתרונות בלתי תלויים של המשוואה $x^2y'' + xy' - y = 0$. מצאו פתרון כללי של המשוואה $x^2y'' + xy' - y = \frac{x^2}{x^2 + x^3}$.

פתרון :

א.

$$y''' + 4y'' + 4y' = 0$$
$$m^3 + 4m^2 + 4m = 0$$
$$\left(m^2 + 4m + 4\right)m = 0$$
$$m_1 = 1,\ m_{2,3} = -2$$
$$y = C_1 e^x + \left(C_2 x + C_3\right)e^{-2x}$$

$$y_p = Ax + B + Ce^{-2x}\sin x + De^{-2x}\cos x + \left(Ex^3 + Fx^2\right)e^{-2x}$$

ב.

$$\begin{pmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2 + x^3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -\frac{2}{x},\ \Delta_1 = -\frac{1}{x^3 + x^4},\ \Delta_2 = \frac{1}{x + x^2}$$
$$C_1' = \frac{1}{2\left(x^2 + x^3\right)} \Rightarrow \frac{1}{2\left(x^2 + x^3\right)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{D}{x+1}$$
$$\frac{1}{2} = A\left(x+1\right) + Bx\left(x+1\right) + Dx^2$$
$$B + D = 0,\ A + B = 0,\ A = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2},\ D = \frac{1}{2}$$
$$C_1(x) = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C_1 = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x}\right) + C_1$$
$$C_2' = -\frac{x^2 + x^3}{1+x} = -x^2 \Rightarrow C_2(x) = -\frac{1}{3}x^3 + C_2$$
$$y(x) = C_1 x + C_2\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(x\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - 1\right) - \frac{1}{3}x^2$$

שאלה 3 . (20 נקודות)

א. פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה

$$x^2y''-3xy'+3y=\ln x,\ x>0$$

ב. בדקו שהפונקציות $\cos x^2, \sin x^2$ הם פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$ ב- $(-\infty,\infty)$. חשבו וורונסקיאן שלהם והראו כי הוא מתאפס ב- $x=0$. האם אין שתי עובדות אלה סותרות?

פתרון: א) נפתור את המשוואה ההומוגנית: $x^2y''-3xy'+3y=0$.

זוהי משוואת אוילר. נחפש פתרון מהצורה $y=x^r, x>0$

$$r(r-1)-3r+3=0 \Rightarrow r_1=1,\quad r_2=3$$

$$y_1(x)=x,\quad y_2(x)=x^3,\qquad y_h(x)=C_1x+C_2x^3$$

ב) נחפש פתרון פרטי לאי הומוגנית. נביא את המשוואה לצורה קנונית:

$$y''-(3/x)y'+(3/x^2)y=\frac{\ln x}{x^2}$$

לכן, $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

נפתור ע"י וריאצית הפרמטרים. הוורוסקיאן הוא $w=\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}=2x^3$.

$$u_1'(x)=\frac{-x^3\ln x}{2x^5}=-(\ln x)/2x^2 \Rightarrow u_1(x)=-\int\frac{\ln x}{2x^2}dx=\frac{1+\ln x}{2x}$$

$$u_2'(x)=\frac{x\ln x}{2x^5}=\frac{\ln x}{2x^4}\Rightarrow\qquad u_2(x)=-\frac{1}{18}\cdot\frac{3\ln x+1}{x^3}$$

לכן, $y(x)=C_1x+C_2x^3+x\cdot[\frac{1+\ln x}{2x}]-x^3\frac{1}{18}\cdot\frac{3\ln x+1}{x^3}$

הפתרון הכללי הוא:

$$y(x)=C_1x+C_2x^3+\frac{1+\ln x}{2}-\frac{1}{18}(1+3\ln x)=$$

$$=C_1x+C_2x^3+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\ln x.$$

שיטה אחרת: ע"י הצבה:

$z=\ln x$ אז ניתן לרשום את המשוואה בצורה: $y''-4y'+3y=z$

מחפשים פתרון מהצורה: $y_p=Az+B \Rightarrow y_p'=A \Rightarrow y_p''=0$. מציבים במשוואה

ומקבלים: $A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{4}{9}$. לכן $y_p=\frac{1}{3}z+\frac{4}{9}$. מכאן,

$y_p=\frac{1}{3}\ln x+\frac{4}{9}$. לכן, $y(x)=C_1x+C_2x^3+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\ln x$.

ב) נציב: עבור $y=\sin x^2$ נקבל $y'=2x\cos x^2$, $y''=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$ ולכן $xy''-y'+4x^3y=x\left(2\cos x^2-4x^2\sin x^2\right)-2x\cos x^2+4x^3\sin x^2=0$. כמו כן עבור $y=\cos x^2$ נקבל $y'=-2x\sin x^2$ ו- $y''=-2\sin x^2-4x^2\cos x^2$. לפיכך $xy''-y'+4x^3y=x\left(-2\sin x^2-4x^2\cos x^2\right)+2x\sin x^2+4x^3\cos x^2=0$, ולכן הפונקציות $\sin x^2,\cos x^2$ הם פתרונות של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$ ב- $(-\infty,\infty)$.
פונקציות אלו בלתי תלויות לינארית ב- $(-\infty,\infty)$ מכיוון שלא יתכן כי פונקציה אחת היא קבוע כפול השניה.
נבדוק את הוורונסקיאן:

$$W(\sin x^2,\cos x^2)=\begin{vmatrix}\sin x^2 & \cos x^2\\ 2x\cos x^2 & -2x\sin x^2\end{vmatrix}=-2x\left(\sin^2 x^2+\cos^2 x^2\right)=-2x .$$

וורונסקיאן זה לא מתאפס עבור $x\neq 0$, אבל $W(0)=0$. עובדות אלה אינן סותרות כי הנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית של המשוואה הדיפרנציאלית: המקדם של y'' הוא x והוא מתאפס שם. לאחר מעבר לצורה קנונית מקבלים את המד"ר $y''-\frac{1}{x}y'+4x^2y=0$. אך מקדם y' הוא $p(x)=-\frac{1}{x}$ והוא אינו רציף ב- $x=0$. לכן, בקטע המכיל את הנקודה $x=0$ המשפט שהוורונסקיאן של פתרונות בת"ל לא מתאפס – כבר איננו נכון.

שאלה 4. (20 נקודות)

א. הראו שנקודה $x_0=0$ היא נקודה רגולרית של המשוואה $y''-x^2y=0$;

ב. מצאו פתרון של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1,\ y'(0)=0$.
ניתן להסתפק בחישוב 4 מחוברים שונים מאפס בטור.

פתרון א.מכיוון ש $x_0=0$ היא נקודה רגילה נחפש פתרון בצורה

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n ,$$

אז: $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\ 0=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\ 0=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$$

$$n=0:2\cdot 1a_2=0$$

$$a_2=0$$
$$n=1:3\cdot 2a_3=0$$
$$a_3=0$$

$$n\geq 2:\ a_{n+2}=\frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_0 \to a_4 \to a_8 \to \dots$$
$$a_1 \to a_5 \to a_9 \to \dots$$
$$y = a_0(1+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^8\dots+\dots\frac{1}{3\cdot 4\dots(4n-1)(4n)}x^{4n}+\dots)+$$
$$+a_1(x+\frac{1}{4\cdot 5}x^5+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9\dots+\dots\frac{1}{4\cdot 5\dots(4n)(4n+1)}x^{4n+1}+\dots)$$

ב.

$$y(0)=a_0$$
$$a_0=0$$

$$y'(0)=a_1$$
$$a_1=1$$

אז פתרון של בעיית התחלה

הוא $y = x+\frac{1}{4\cdot 5}x^5+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9\dots+\dots\frac{1}{4\cdot 5\dots(4n)(4n+1)}x^{4n+1}+\dots$

שאלה 5 . (20 נקודות)

פתרו את מערכת המשוואות הנתונה עם תנאי ההתחלה (אין להשתמש בהתמרת לפלס) :

$$\begin{cases} x'(t)-3x(t)+2y(t)=0 \\ y'(t)-x(t)-y(t)=0 \\ x(0)=2,\ y(0)=1 \end{cases}$$

פתרון :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-m & -2 \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} = m^2-4m+5=0 \Rightarrow \quad m_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1-i)v-2w=0 \Rightarrow\ w=\frac{1-i}{2}v \Rightarrow \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{pmatrix}(\cos t+i\sin t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t+i\sin t \\ \frac{1}{2}(\cos t+\sin t)+i\left(\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{2}(\cos t+\sin t) \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 2,\ C_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

שאלה 6. (20 נקודות)

א. מצא התמרת לפלס של $u_\pi(t) \cdot e^{-2t} \cdot \cos t$

$$u_\pi(t) \cdot e^{-2t} \cdot \cos t = -u_\pi(t) \cdot e^{-2(t-\pi+\pi)} \cdot \cos(t-\pi) = -e^{-2\pi} u_\pi(t) \cdot e^{-2(t-\pi)} \cdot \cos(t-\pi)$$

ניעזר גם בקשר מדף הנוסחאות $L\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

כדי לקבל $L\{RHS\} = -e^{-2\pi} e^{-\pi s} \frac{s+2}{(s+2)^2+1^2} = -e^{-(s+2)\pi} \frac{s+2}{(s+2)^2+1^2}$

ב. פתרו את בעיית התחלה הבאה בעזרת התמרת לפלס :

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = \delta(t-2) \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$$

נרצה לבצע התמרת לפלס על שני האגפים

התמרה על אגף שמאל נותנת $L\{LHS\} = L\{y''' - 3y'' + 2y'\} =$

$$= L\{y'''\} - 3L\{y''\} + 2L\{y'\} =$$

$$= [s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)]$$

$$-3[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] =$$

$$= (s^2 - 3s + 2)sY(s) - (s-2)s =$$

$$= (s-2)(s-1)sY(s) - (s-2)s$$

התמרה על אגף שמאל נותנת $L\{RHS\} = L\{\delta(t-2)\} = e^{-2s}$

ולאחר סידור $Y(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-2)(s-1)s} + \frac{1}{s-1}$

בעזרת ההתמרה ההופכית נקבל שהפתרון לבעיית ההתחלה הוא

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-2)(s-1)s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

נרצה להשתמש בקשר $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

ונשים לב שמתקיים $L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-2)(s-1)s}\right\} = u_2(t) \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-1)s}\right\}(t-2)$

נשתמש בפירוק לשברים חלקיים: $\frac{1}{(s-2)(s-1)s} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s}$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(s-1)s + B(s-2)s + C(s-2)(s-1)$$

במקום להתאמץ ולפתוח את הסוגריים, נציב מספרים נוחים:

עבור $s = 0$ נקבל $1 = 2C$

עבור $s = 1$ נקבל $1 = -B$

עבור $s = 2$ נקבל $1 = 2A$

כלומר $\frac{1}{(s-2)(s-1)s} = \frac{1}{2(s-2)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2s}$

ומכאן $L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s-2)(s-1)s}\right\} =$

$$= u_2(t) \cdot \left[\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}(t-2) - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t-2) + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t-2)\right]$$

לכן בסה"כ $y(t) = \frac{1}{2}u_2(t) \cdot \left(e^{2(t-2)} - 2e^{t-2} + 1\right) + e^t$

Table of Laplace Transforms

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p,\ p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	12.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
13.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	14.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
15.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	16.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
17.	$u_c(t)=u(t-c)$	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	18.	$\delta(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}$
19	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	20.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
21.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	22.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
23.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	24.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
25.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	26.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
27	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			