תרגיל בית 2 אינפי 3

1. תהינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קומפקטיות, ותהינה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצה של קבוצות קומפקטיות. הוכיחו או ההפריכו את הטענות הבאות:

(א) $A\cup B$ קומפקטית.

פתרון. נכון. אם A,B קומפקטיות אז שתיהן סגורות וחסומות. איחוד (של מספר סופי) של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה ולכן $A\cup B$ סגורה. בנוסף, איחוד קבוצות חסומות הוא חסום כי אם A מוכלת בכדור $B(0,r_A)$ ו B מוכלת בכדור $B(0,r_B)$ אז $A\cup B$ מוכלת בכדור $B(0,\max\{r_A,r_B\})$. ולכן $A\cup B$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

(ב) $A\cap B$ קומפקטית.

פתרון. נכון. בדומה ל א'. חיתוך קבוצות סגורות היא קבוצה סגורה. חיתוך קבוצות חסומות היא קבוצה חסומה (כי אם A מוכל ב $B(0,r_A)$ אז גם $A\cap B$ מוכל שם). ולכן $A\cap B$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

(ג) $A\backslash B$ קומפקטית.

פתרון. לא נכון. נבחר $A=[0,2]$ ו $B=[0,1]$ אז $A\backslash B=(1,2]$ שזאת לא קבוצה סגורה ולכן לא קומפקטית.

(ד) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ קומפקטית.

פתרון. לא נכון. נבחר $A_n=\{n\}$ ואז $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\mathbb{N}$ שזאת קבוצה לא חסומה ולכן לא קומפקטית.

2. אם $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות. נגדיר $A+B=\{a+b\mid a\in A,\quad b\in B\}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם A,B חסומות אז $A+B$ חסומה.

פתרון. נכון. אם A נמצאת בכדור $B(0,r_A)$ ו B נמצאת בכדור $B(0,r_B)$ אז נגדיר $r=r_A+r_B$ ואז יתקיים שאם $x\in A+B$ אז

$$||x||=||a+b||\leq||a||+||b||\leq r_A+r_B=r$$

ולכן $x \in B(0,r)$ כלומר $A+B \subseteq B(0,r)$. לכן $A+B$ חסומה.

(ב) אם A,B פתוחות אז $A+B$ פתוחה.

פתרון. נכון. נוכיח דבר יותר חזק שיוכיח גם את ד. נראה שאם A פתוחה ו B קבוצה כלשהיא אז $A+B$ פתוחה. נשים לב ש

$$A+B=\bigcup_{b\in B} A+\{b\}$$

ולכן מספיק להוכיח ש $A+\{b\}$ היא קבוצה פתוחה, כי איחוד של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה. ניקח

$$x\in A+\{b\}$$

כלומר

$$x=a+b$$

כאשר $a\in A$. בגלל ש a קבוצה פתוחה, אנחנו יודעים שיש $r>0$ כך ש

$$B(a,r)\subseteq A$$

כלומר

$$||y-a||<r\Rightarrow y\in A$$

אנחנו נוכיח ש $B(x,r)\subseteq A+\{b\}$ וזה יוכיח ש $A+\{b\}$ קבוצה פתוחה. באמת, אם $y\in B(x,r)$ אז

$$||y-x||<r$$

$$||y-(a+b)||<r$$

$$||(y-b)-a||<r$$

כלומר

$$y-b\in B(a,r)\subseteq A$$

ולכן

$$y\in A+\{b\}$$

כנדרש.

(ג) אם A,B סגורות אז $A+B$ סגורה.

פתרון. לא נכון. בתוך $\mathbb{R}^2$ נבחר $A = \{(x,y) \mid x = 0\}$ ו $B = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ אלה שתי קבוצות סגורות אבל $A + B = \{(x,y) \mid x > 0\}$ שזאת לא קבוצה סגורה..

די ברור ש A סגורה. נסביר קצת יותר באריכות למה B סגורה. ניקח איזשהיא סדרה

$$(x_n, y_n) \in B$$

שמתכנסת

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$$

אז צריך להוכיח ש $(x_0, y_0) \in B$ קודם כל, בגלל ש $x_n \in (0, \infty)$ אז

$$x_0 \in [0, \infty)$$

אבל לא ייתכן ש $x_0 = 0$ כי אז $x_n \to 0$ ו

$$y_n = \frac{1}{x_n}$$

אינה מתכנסת, בסתירה לכך ש $y_n \to y_0$. לכן

$$x_0 \in (0, \infty)$$

כעת

$$y_n = \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x_0}$$

אבל

$$y_n \to y_0$$

ולכן

$$y_0 = \frac{1}{x_0}$$

כלומר

$$(x_0, y_0) \in B$$

כנדרש.

(ד) אם A פתוחה ו B סגורה אז $A + B$ פתוחה.

הוכחנו כבר בסעיף ב' שזה נכון.

3. האם גבול הסדרה הבאה קיים? ואם כן, מהו?

$$\left(\frac{n^3 + 4n + 5}{n^6 + 2n^2 + 3}, (1 - \frac{1}{n})^n\right)$$

פתרון. ראינו שאפשר לחשב גבול של סדרה רכיב רכיב ולכן פשוט נחשב את הגבולות של הרכיבים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+4n+5}{n^6+2n^2+3} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$$

לכן הגבול של הסדרה הוא

$$(0, e^{-1})$$

4. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ב $\mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו: אם $y_n = d_2(x_n, 0)$ היא סדרת מספרים עולה ממש אז x_n היא סדרה מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$.
הערה: d_2 היא המטריקה האוקלידית הסטנדרטית.

פתרון. הטענה לא נכונה אפילו ב $\mathbb{R}$. נבחר $x_n = (-1)^n(1-\frac{1}{n})$ ואז הסדרה חסומה כי $|x_n| < 1$. אבל $y_n = d(x_n, 0) = |x_n| = 1 - \frac{1}{n}$ זאת סדרה עולה ממש. ברור ש x_n לא מתכנסת.