אלגברה מופשטת - תרגיל 3

שאלה 1

א. מצאו את שתי הספרות האחרונות של 1249^{602}.

ב. מצאו את $5774^{862}+2014 (\bmod 95)$.

שאלה 2

א. תהי D_7 החבורה הדיהדרלית מסדר 14. תארו שלוש תת־חבורות לא טריוויאליות שלה. הוכיחו כי כולן חבורות אבליות.

ב. מצאו תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית של D_7. האם יש יותר מאחת?

שאלה 3

יהיו $H,K\le G$ תת־חבורות. הגדרנו מכפלת תת־חבורות $HK=\{hk : h\in H, k\in K\}$.

א. הוכיחו כי HK תת־חבורה אם ורק אם $HK=KH$.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם כי אם $N\triangleleft G$ תת־חבורה נורמלית, אז $HN\le G$ תת־חבורה.

ג. הוכיחו כי אם $N_1,N_2\triangleleft G$ תת־חבורות נורמליות, אז $N_1\cap N_2\triangleleft G$ וגם $N_1N_2\triangleleft G$ תת־חבורות נורמליות.

שאלה 4

תארו את המחלקות השמאליות של תת־החבורה H בחבורה G:

א. $H=12\mathbb{Z}, G=3\mathbb{Z}$.

ב. תהינה G_1,G_2 חבורות. $H=G_1\times\{e_2\}, G=G_1\times G_2$ כאשר e_2 הוא איבר היחידה של G_2.

ג. $G=U_{36}, H=\langle 13\rangle$.

שאלה 5

תהי G חבורה. ראינו כי ישנה התאמה חח"ע ועל בין מחלקות שמאליות ולבין מחלקות ימניות לפי ההעתקה $\varphi : gH\mapsto Hg^{-1}$ כאשר $g\in G$ ו- $H\le G$ תת־חבורה.

הוכיחו או הפריכו: ההעתקה $\psi : gH\mapsto Hg$ היא חח"ע ועל.

שאלה 6

א. כתבו בכתיב מחזורים איברים מסדר 4 בחבורה S_6. מצאו כמה כאלו יש.

ב. הוכיחו כי החבורות S_4 ו- D_{12} הן לא איזומורפיות, למרות ששתיהן חבורות לא אבליות מסדר 24.

שאלה 7

עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות הוכיחו כי היא הומומורפיזם. בדקו עבור כל פונקציה האם היא מונומורפיזם, האם היא אפימורפיזם והאם היא איזומורפיזם.

א. $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^3$.

ב. $f:(\mathbb{Q}^*,\cdot)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^3$.

ג. $f:G_1\times G_2\to G_2\times G_1$ כאשר $g_1\in G_1, g_2\in G_2$ איברי חבורות אבליות G_1,G_2 בהתאמה והפונקציה מוגדרת על ידי $f(g_1,g_2)=(g_2^{-1},g_1)$.

ד. $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^+,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=e^x$. הפונקציה הזו נקראת $\exp$.

שאלה 8

א. מצאו אפימורפיזם $\varphi:(M_5(\mathbb{Q}),+)\to(\mathbb{Q}^5,+)$ כאשר $\mathbb{Q}^5$ היא מכפלה קרטזית של חמישה עותקים של $\mathbb{Q}$.

ב. מצאו איזומורפיזם $\varphi:G\to\mathbb{C}^*$ כאשר $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$ שהוכחתם בתרגיל 1 שהיא חבורה.

שאלת אתגר

יהיו תמורות $\sigma,\tau\in S_n$ כך שמתקיים $\sigma=\tau^2$, אז נקרא ל- τ **שורש** של σ. מצאו תנאי מספיק והכרחי שקובע האם לתמורה נתונה $\sigma\in S_n$ קיים שורש. אם קיים שורש לתמורה, איך אפשר למצוא אותו?

שאלת אתגר

הוכחתם בהרצאה את המסקנה הבאה ממשפט לגראנז': תהי G חבורה סופית, ויהיו $K\le H\le G$ תת־חבורות, אזי $[G:K]=[G:H][H:K]$.

כעת הוכיחו את אותה תוצאה כאשר מניחים רק ש- K תת חבורה מאינדקס סופי ב- G. כלומר, מבלי להניח ש- G סופית, ומבלי להניח סופיות של H.

בהצלחה!