הגדרה: תהי $T: V \to V$ הע"ל.
ניתן להציב את T בכל פולינום.
הצבה של העתקה בפולינום: כפל הופך להרכבה.
וα הופך להיות ההעתקה αId.
לכן ניתן להגדיר את הפ"מ של T להיות הפולינום מהדרגה הנמוכה ביותר שT מאפס.
תזכורת: לכל הע"ל $T: V \to V$ יש פ"א, שזה הפ"א של המטריצות המייצגות שלה מהצורה

$$[T]_B^B$$

ואנחנו יודעות שכל המטריצות האלה דומות ולכן יש להן את אותו פ"א.
תרגיל: תהי $0 \neq T: V \to V$ הע"ל שמקיימת $ImT \subseteq \ker T$. חשבו את הפ"מ של T.
פתרון: מכיוון ש$ImT \subseteq \ker T$, אז לכל $v \in V$

$$T(T(v)) = 0$$

לכן $T^2 = 0$. כלומר, הפולינום x^2 מאפס את T.
אז הפולינום המינימלי של T מחלק אותו. יש 2 אפשרויות: x, x^2.
אם הפ"מ הוא x, זה אומר שT מאפס את הפולינום x, כלומר $T = 0$. בסתירה לנתון.
לכן

$$m_T = x^2$$

תרגיל:

$$T: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$$

$$T(A) = A + A^t$$

מצאו את m_T
פתרון:

$$T^2(A) = T(T(A)) = T(A + A^t) = A + A^t + (A + A^t)^t =$$

$$A + A^t + A^t + A = 2T(A)$$

אז ניתן לראות שT מאפסת את הפולינום

$$x^2 - 2x$$

זה פולינום מדרגה 2.

אין פולינום מדרגה 1 שהיא מאפסת, כי אם T מאפסת את

$$x-\alpha$$

אז

$$T-\alpha Id=0$$

כלומר

$$T=\alpha Id$$

ניתן להצביע על מטריצה A כך ש$T(A)$ לא יהיה שווה לסקלר כפול A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה: כל מה שעשינו נכון עבור $n\geq 2$.
עבור $n=1$

$$T(A)=A+A^t=2A$$

הפולינום המינימלי יהיה

$$x-2$$

ג'ורדן

הגדרות:

1. בלוק ג'ורדן מגודל $n\times n$ שמתאים לסקלר λ

$$J_n(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \vdots & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_2(8)=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J_5(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_1(\lambda) = (\lambda)$$

תכונות של בלוקי גורדן: הערך העצמי היחיד של $J_n(\lambda)$ הוא λ. והר"ג שלו הוא 1 .
ולכן לכל $n > 1$, בלוק ג'ורדן לא לכסין.
פ"א

$$(x-\lambda)^n$$

פ"מ:

$$(x-\lambda)^n$$

2. מטריצת ג'ורדן היא מטריצת בלוקים שכל אחד מהבלוקים שלה הוא בלוק גורדן.

$$J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus ... = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$J_1(2) \oplus J_2(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תכונות של מטריצות ג'ורדן:

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$$

$$p_J = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$$

מכפלת הפולינומים האופייניים של כל בלוק.
ולכן הע"ע הם $\lambda_1, ..., \lambda_k$
הר"א של כל ע"ע הוא סכום גדלי הבלוקים שמתאימים לו.
הר"ג של כל ע"ע הוא מספר הבלוקים שמתאימים לו.
הפ"מ של מטריצת בלוקים שווה לlcm של הפולינומים המינימליים של כל אחד מהבלוקים.
לבלוקים שמשוייכים לע"ע שונה יש פולינומים מינימליים זרים.
לכל ע"ע, הlcm של הפ"מ של הבלוקים שמתאימים לו הוא $(x-\lambda_1)^{l_i}$ כאשר l_i זה הגודל של הבלוק הכי גדול שמתאים לו.
לכן

$$m_J = (x-\lambda_1)^{l_1} \cdots (x-\lambda_t)^{l_t}$$

כאשר $\lambda_1, ..., \lambda_t$ הם הע"ע השונים, וl_i הוא גודל הבלוק הכי גדול שמתאים לע"ע.

$$J = J_2(1) \oplus J_3(1) \oplus J_1(2) \oplus J_4(-1)$$

$$p_J = (x-1)^5 (x-2)(x+1)^4$$

$$m_J = (x-1)^3 (x-2)(x+1)^4$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 2 & & & & \\
 & & & & & & -1 & 1 & & \\
 & & & & & & & -1 & 1 & \\
 & & & & & & & & -1 & 1 \\
 & & & & & & & & & -1
\end{pmatrix}$$

ע"ע- $1, 2, -1$
ר"ג - $2, 1, 1$ בהתאמה.
משפט ג'ורדן: כל A עם פ"א מל"ל דומה למטריצת ג'ורדן יחידה עד כדי סדר הבלוקים.
הערה: למצוא במפורש את צורת ג'ורדן של מטריצה זאת משימה קשה.
ע"י הפולינום האופייני, הפולינום המינימלי והריבויים הגיאומטריים אנחנו יכולים לצמצם את האפשרויות.
לפעמים הנתונים האלו יתאימו רק לאפשרות אחת.

דוגמאות: עבור המטריצה $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מתקיים כי:

1. פ"א = $p_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^3$
   (א) פ"מ $m_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$
   (ב) ר"ג: $\dim V_1 = 2, \dim V_{-2} = 1$

מי היא צורת הג'ורדן של A?
הר"א של -2 הוא 1. ולכן סכום גדלי הבלוקים שמתאימים לו הוא 1. כלומר יש רק בלוק אחד מגודל 1.
הר"א של 1 הוא 3. לכן סכום גדלי הבלוקים שמתאימים ל1 הוא 3. הר"ג הוא 2, כלומר, יש 2 בלוקים שמתאימים ל1. החזקה של 1 בפ"מ הוא 2. ואנחנו יודעים שהחזקה בפולינום המינימלי שווה לגודל הבלוק הגדול ביותר.

$$J_1(-2) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1)$$

תרגיל: מצאו 2 מטריצות ג'ורדן שיש להם אותו פ"א, פ"מ ולכל ע"ע אותו ר"ג. (שאינן דומות. כלומר, זה לא עד כדי שינוי סדר הבלוקים)
פתרון:

$$J_2(a) \oplus J_2(a)$$

$$J_3(a) \oplus J_1(a)$$

לא עובד! כי אין את אותו פ"מ.

$$J_3(a) \oplus J_3(a) \oplus J_1(a)$$

$$J_3(a) \oplus J_2(a) \oplus J_2(a)$$

עובד!
הערה: 7 הוא הגודל המינימלי שבו אפשר לעשות את זה.
כלומר עד גודל 6×6 צורת הג'ורדן נקבעת ביחידות ע"י הפ"א, הפ"מ והר"ג.
תרגיל: תהי $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ נילפוטנטית, $rank(A) = 5$.
הוכיחו ש$A^3 \neq 0$.
פתרון:

$$p_A = x^7$$

$$\dim N(A) = 2$$

לכן הר"ג של 0 הוא 2.
לA יש רק ערך עצמי 1. לכן בצורת ג'ורדן של A כל הבלוקים מתאימים לערך 0.
מכיוון שהריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 2, יש בדיוק 2 בלוקים.
לכן האפשרויות הן:

$$J_6(0) \oplus J_1(0)$$

$$J_5(0) \oplus J_2(0)$$

$$J_4(0) \oplus J_3(0)$$

בפ"מ החזקה של 0 היא הגודל של הבלוק הכי גדול, ולכן האפשרויות הן

$$x^6, x^5, x^4$$

לכן לא ייתכן ש$x^3 = 0$.

מסקנה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אז A לכסינה אמ"ם הפ"מ של A מל"ל שונים.

הוכחה: אם A לכסינה אז היא דומה לD אלכסונית. $m_A = m_D$ מטריצה אלכסונית היא בפרט מטריצת ג'ורדן.

לכן בפ"מ שלה החזקה של כל ערך שווה לגודל של הבלוק הכי גדול שמתאים לערך. כל הבלוקים במטריצה אלכסונית הם מגודל 1.

כיוון שני: אם m_A מל"ל שונים. זה בפרט אומר שהפ"א של A מל"ל ולכן יש לה צורת ג'ורדן. בצורת ג'ורדן הגודל של הבלוק הכי גדול מכל ערך שווה לחזקה בפולינום המינימלי. כלומר 1. אם הבלוק הכי גדול של כל ערך הוא מגודל 1 , אז כל הבלוקים הם מגודל 1. כלומר, המטריצה אלכסונית.

תרגיל: תהי A מטריצה אידמפוטנטית, כלומר $A^2 = A$. הוכיחו שA לכסינה.

פתרון: הפולינום $x^2 - x$ מאפס את A. לכן

$$m_A | x^2 - x = x(x-1)$$

לכן m_A מל"ל שונים.

גורר מיידית שA לכסינה.

תרגיל: הוכיחו שלכל מטריצה מרוכבת הפיכה יש שורש.

כלומר, אם $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה, אז קיים $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש$B^2 = A$.

שיטת הוכחה:

1. נוכיח שהטענה נכונה עבור בלוקי ג'ורדן.
2. נסיק משלב 1 שהטענה נכונה לכל מטריצת ג'ורדן.
3. נעזר בשלב 2 ובעובדה שכל מטריצה מרוכבת דומה למטריצת ג'ורדן, כדי להוכיח את הטענה לכל מטריצה מרוכבת הפיכה.

הוכחה:

1.

$$J_n(\lambda)$$

הפיכה. כלומר, $\lambda \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 1 & & \\ & \sqrt{\lambda} & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 2\sqrt{\lambda} & 1 & & \\ & \lambda & 2\sqrt{\lambda} & 1 & \\ & & & \ddots & 2\sqrt{\lambda} \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

מה הצורת ג'ורדן של B^2?
יש ע"ע יחיד- λ.
הר"ג- 1. משתמשים בעובדה ש$\lambda \neq 0$. אחרת הר"ג היה 2.
לכן צורת הג'ורדן היא בלוק ג'ורדן.

$$P^{-1}B^2P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

בתור שורש אפשר לקחת $P^{-1}BP$
2. תהי

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$$

J הפיכה. לכן כל $\lambda_i \neq 0$.
לכל i יש B_i שמהווה שורש. נקח

$$B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$$

$$B^2 = B_1^2 \oplus \cdots \oplus B_k^2 = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$$

3. תהי A הפיכה. קיימת J הפיכה כך ש

$$A = PJP^{-1}$$

J מטריצת ג'ורדן הפיכה ולכן יש לה שורש. כלומר, יש B' כך ש $B'^2 = J$

$$A = (PB'P^{-1})^2$$