תרגיל 5 – מתמטיקה לכימאים ג'

1. קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}\left(3n^2-1\right)}$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}\left(3n^2-1\right)}\sim\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt{n}}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}\left(3n^2-1\right)}}{\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt[3]{n}\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}\sqrt{n}\left(3n^2-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(3n^2-1\right)}=\frac{1}{3}$$

מכיוון ש $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt{n}}$ מתכנס. אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{2\frac{1}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\frac{1}{6}}}$ מתכנס (מכיוון ש

$\alpha=2\frac{1}{6}>1$). לכן, הטור הנתון מתכנס (כלומר, מתכנס בהחלט).

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+n}{3^n}$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשתמש במבחן ההשוואה הראשון:

$$0\le\frac{(-1)^n+n}{3^n}\le\frac{n+1}{3^n}$$

לפי המבחן, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$ מתכנס, הטור הנתון מתכנס.

(שימו לב כי אם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$ מתבדר זה לא עוזר לנו).

נשתמש במבחן דאלמבר עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(n+2)}{3^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3(n+1)}=\frac{1}{3}<1$$

מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$ מתכנס לפי מבחן דאלמבר. לכן, גם הטור הנתון מתכנס (כלומר, מתכנס בהחלט).

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{3n}+3^{4n}+2^n}{5^{2n}+6^{3n}}$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\frac{4^{3n}+3^{4n}+2^n}{5^{2n}+6^{3n}}=\frac{64^n+81^n+2^n}{25^n+216^n}\sim\frac{81^n}{216^n}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{3n}+3^{4n}+2^n}{5^{2n}+6^{3n}}}{\frac{81^n}{216^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{64^n}{81^n}+\frac{81^n}{81^n}+\frac{2^n}{81^n}}{\frac{25^n}{216^n}+\frac{216^n}{216^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\left(\frac{64}{81}\right)^n}_{\to 0}+1+\underbrace{\left(\frac{2}{81}\right)^n}_{\to 0}}{\underbrace{\left(\frac{25}{216}\right)^n}_{\to 0}+1}=1$$

מכיוון ש $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{81^n}{216^n}$ מתכנס. אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{81^n}{216^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{81}{216}\right)^n$ מתכנס בתור טור הנדסי

עם מנה $|q|\le 1$. לכן, הטור הנתון מתכנס (כלומר, מתכנס בהחלט).

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n^3)}$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשים לב, $a_n=\frac{1}{n\ln(n^3)}=\frac{1}{3n\ln n}$ סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס. לכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי על הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n^3)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n\ln n}$.

לפי מבחן העיבוי, הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{3\cdot 2^n\ln(2^n)}$ מתכנס. אבל, הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{3\cdot 2^n\ln(2^n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3\ln(2^n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3\ln(2^n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3\ln(2)n}=\frac{1}{3\ln(2)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

מתבדר. לכן, הטור הנתון מתבדר.

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos\left(n^2\right)}{3^n}$

פתרון:

נבדוק התכנסות בהחלט של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2^n\cos\left(n^2\right)}{3^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left|\cos\left(n^2\right)\right|}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos\left(n^2\right)\right|$$

נשתמש במבחן ההשוואה הראשון:

$$0\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos\left(n^2\right)\right|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

מכיוון שהטור ההנדסי $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ מתכנס, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos\left(n^2\right)\right|$ מתכנס. כלומר הטור הנתון מתכנס בהחלט (ובפרט מתכנס).

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

פתרון:

נבדוק התכנסות בהחלט של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

נשתמש במבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^{-1}}\right)^{\overbrace{\frac{n}{n+1}}^{\to 1}}=e^{-1}<1$$

מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס. לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

פתרון:

נשים לב $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$ לכן $(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ לא שואף לאפס.

כלומר, לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות טורים. לכן, הטור הנתון מתבדר.

.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$

פתרון:

נבדוק התכנסות בהחלט של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n^2+1)}$$

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\frac{1}{\ln(n^2+1)}\sim\frac{1}{\ln(n^2)}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n^2+1)}}{\frac{1}{\ln(n^2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2)}{\ln(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2)}{\ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2)}{\ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n^2)}{\ln(n^2)}}{\frac{\ln(n^2)}{\ln(n^2)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln(n^2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln(n^2)}}_{\to 0}}=1$$

(לחילופין ניתן לחשב את הגבול האחרון באמצעות כלל לופיטל).

מכיוון ש $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n^2+1)}$ מתכנס אם

ורק אם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n^2)}$ מתכנס.

נתבונן בטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n^2)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\ln(n)}$.

לפי מבחן ההשוואה הראשון

$$\frac{1}{2n}\le\frac{1}{2\ln(n)}$$

מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ נובעת התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\ln(n)}$. לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n^2+1)}$ מתבדר. כלומר הטור הנתון לא מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$

נשים לב: $a_n=\frac{1}{\ln(n^2+1)}$ סדרה מונוטונית יורדת שואפת לאפס. לכן, לפי מבחן לייבניץ הטור הנתון מתכנס.

בסה"כ: הטור הנתון מתכנס בתנאי.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(3^n-1)}$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\frac{3^n}{2^n(3^n-1)}\sim\frac{3^n}{2^n3^n}=\frac{1}{2^n}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{2^n(3^n-1)}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{2^n(3^n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{6^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^n}{6^n}}{\frac{6^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0}}=1$$

מכיוון ש $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ מתכנס. אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ מתכנס בתור טור הנדסי

עם מנה $|q|\leq 1$. לכן, הטור הנתון מתכנס (כלומר, מתכנס בהחלט).

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}e^{\frac{1}{n}}$

פתרון:
נבדוק התכנסות בהחלט של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}e^{\frac{1}{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln n}$$

נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$\frac{1}{n}\le\frac{1}{\ln n}\le\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln n}$$

לכן, מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ נובעת התבדרותו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}e^{\frac{1}{n}}\right|$.

כלומר, הטור הנתון לא מתכנס בהחלט.

נבדוק התכנסות בתנאי של הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}e^{\frac{1}{n}}$

נשים לב: $b_n=\frac{1}{\ln n}$ סדרה מונוטונית יורדת שואפת לאפס.

$c_n=e^{\frac{1}{n}}$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת, שכן

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{e^{\frac{1}{n+1}}}{e^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=e^{\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}}=e^{\frac{-1}{n(n+1)}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{n(n+1)}}}<1$$

וכן $\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}=1$

לכן, $a_n=b_nc_n$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת (כמכפלה של שתי סדרות יורדות חיוביות)

השואפת לאפס $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_nc_n=\lim_{n\to\infty}b_n\lim_{n\to\infty}c_n=0\cdot1=0$.

לכן, לפי מבחן לייבניץ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}e^{\frac{1}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

לכן, הטור הנתון מתכנס בתנאי.

.1.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

פתרון:

נבדוק התכנסות בהחלט של הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$$

נשתמש במבחן דאלמבר עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}}}{\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}}\cdot\frac{3!n!3^n}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!}{(n+1)!3}\cdot\frac{n!}{(n+3)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+4)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+4}{1!}=\frac{1}{3}<1$$

מכיון ש $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ מתכנס. כלומר, הטור הנתון מתכנס בהחלט.

.1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. (לכל n טבעי $0<\frac{1}{n}\le 1$ ובקטע $[0,1]$ הפונקציה $\sin x$ מחזירה ערכים חיוביים). לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$$

מכיון ש $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתכנס. אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר לכן הטור הנתון מתבדר.

.1.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. (לכל n טבעי $0<\frac{1}{n}\le 1$ ובקטע $[0,1]$ הפונקציה $\tan x$ מחזירה ערכים חיוביים). לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}=\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\underbrace{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\sqrt{n}}\sim\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}\sim\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n\sqrt{n}}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)n\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)n}{\underbrace{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$$

מכיוון ש $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ מתכנס. אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס ($\alpha=\frac{3}{2}>1$) לכן הטור הנתון מתכנס (כלומר מתכנס בהחלט).

.1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\right)$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי (לכל n טבעי $\sqrt{n^4+n}\geq\sqrt{n^4-n}$). לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשים לב,

$$\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}=\frac{\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\right)\left(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}\right)}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}=\frac{\left(n^4+n-(n^4-n)\right)}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}=$$

$$\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}$

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}\sim\frac{n}{\sqrt{n^4}}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}=\frac{2}{2}=1$$

מכיוון ש $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתכנס. אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר לכן הטור הנתון מתבדר.

1.15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}$

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון חיובי. לכן התכנסות בהחלט שקולה להתכנסות ואין אפשרות של התכנסות בתנאי.

נשים לב,

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$$
$$\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$$

לכן

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}}$$

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}}\sim\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{n}}}=\sqrt{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^{\frac{6}{4}}}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\underbrace{\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n-1}\sqrt{n}\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\sqrt{n}\sqrt{n-1}}\right)}_{\to\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

מכיוון ש $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ מתכנס. אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ מתבדר $(\alpha<1)$ לכן הטור הנתון מתבדר.

.2 קבעו עבור אילו ערכי p הטורים הבאים מתכנסים.

.2.1 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$

פתרון: נשים לב, לכל p הטור טור חיובי.

נחלק למקרים:

עבור $p \le 0$ **:** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-p}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{|p|}}{n}$.

לפי מבחן ההשוואה הראשון,

$$0 \le \frac{1}{n} \le \frac{(\ln n)^{|p|}}{n}$$

לכן, מהתבדרות הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ נובעת התבדרותו של הטור הנתון לכל $p \le 0$

עבור $p > 0$ **:**

נשים לב כי הסדרה $a_n=\frac{1}{n(\ln n)^p}$ היא סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס. לכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי על הטור הנתון.

לפי מבחן העיבוי, הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^p}$ מתכנס. נתבונן בטור:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2^n)^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\ln 2)^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln 2)^p}=\frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

הטור מתכנס אם $p>1$ ומתבדר אם $p<1$. לכן, גם הטור הנתון מתכנס אם $p>1$ ומתבדר אם $p<1$ (כמובן, כל החישוב הנ"ל נעשה בתחום $p>0$).

בסה"כ, ע"י איחוד התוצאות: הטור מתכנס אם ורק אם $p>1$.

.2.2 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^p}$

פתרון: נשים לב, לכל p הטור טור חיובי.

נחלק למקרים:

עבור $p \le 0$ **:** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^p}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln(\ln n))^{-p}}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln(\ln n))^{|p|}}{n\ln n}$.

לפי מבחן ההשוואה הראשון,

$$0 \le \frac{1}{n\ln n} \le \frac{(\ln(\ln n))^{|p|}}{n\ln n}$$

מהתבדרות הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ (שנלמדת מהסעיף הקודם עבור $p=1$) נובעת התבדרותו של הטור הנתון לכל $p \le 0$.

עבור $p > 0$ **:**

נשים לב כי הסדרה $a_n = \frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^p}$ היא סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס.

לכן ניתן להשתמש במבחן העיבוי על הטור הנתון.

לפי מבחן העיבוי, הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\ln 2^n(\ln(\ln 2^n))^p}$ מתכנס. נתבונן בטור:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\ln 2^n(\ln(\ln 2^n))^p} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2(\ln(n\ln 2))^p} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2(\ln n+\ln\ln 2)^p}$$

נשתמש במבחן ההשוואה השני עם הסדרות:

$$a_n = \frac{1}{n\ln 2(\ln n+\ln\ln 2)^p} \sim \frac{1}{n(\ln n)^p} = b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\ln 2(\ln n+\ln\ln 2)^p}}{\frac{1}{n(\ln n)^p}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^p}{\ln 2(\ln n+\ln\ln 2)^p} = \frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(\ln n)^p}{(\ln n)^p}}{\frac{(\ln n+\ln\ln 2)^p}{(\ln n)^p}}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\ln n}{\ln n}+\frac{\ln\ln 2}{\ln n}\right)^p} = \frac{1}{\ln 2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\underbrace{\left(\frac{\ln\ln 2}{\ln n}\right)}_{\to 0}\right)^p} = \frac{1}{\ln 2}\cdot 1 = \frac{1}{\ln 2}$$

מכיוון ש $0 < \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} < \infty$, לפי מבחן ההשוואה השני הטור הנתון מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ מתכנס. אבל ראינו בתרגיל הקודם כי הטור הנ"ל מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p<1$ לכן, כך קורה גם עבור הטור המקורי.

בסה"כ, ע"י איחוד התוצאות: הטור מתכנס אם ורק אם $p>1$.

הערה: בשתי השאלות האחרונות לא חייבים להפריד למקרים.
אבל, אם לא מפרידים, יש צורך להסביר מדוע הסדרה בתוך הטור מונוטונית יורדת שואפת לאפס. (עבור $p<0$ זה לא לגמרי טריוויאלי).

3. קבעו עבור אילו ערכי x הטורים הבאים מתכנסים.

3.1 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx-2\cos nx}{n}$

פתרון:

עבור $x\neq 2\pi k$ **:** הטורים $\sum_{n=2}^{\infty}\sin nx$ **ו** $\sum_{n=2}^{\infty}\cos nx$ חסומים, לכן גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(\sin nx-2\cos nx)$ חסום.

לכן, מכיוון ש $a_n=\frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס, לפי משפט דיריכלה, הטור הנתון מתכנס.

עבור $x=2\pi k$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx-2\cos nx}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n2\pi k)-2\cos(n2\pi k)}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-2}{n}=-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

מתבדר.

לכן, בסה"כ: ערכי ה x עבורם הטור מתכנס הם כל $x\neq 2\pi k$.

3.2 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx+3}{n(\ln n)}$

פתרון: נשים לב, לכל x הטור הנתון חיובי. לכן, ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

$$\frac{2}{n(\ln n)}\leq\frac{\cos nx+3}{n(\ln n)}\leq\frac{4}{n(\ln n)}$$

לפי שאלה 2.1 עבור $p=1$, הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(\ln n)}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}$ מתבדר. לכן, לפי מבחן ההשוואה הראשון, גם הטור הנתון מתבדר.

כלומר, אין ערכי x עבורם הטור מתכנס.

3.3 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{nx}{3}\right)}{n}$

פתרון:

נשים לב כי לכל $x\neq 2\pi k$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\cos nx$ חסום.

לכן, לכל $\frac{x}{3} \neq 2\pi k$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \cos\left(n\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \cos\left(\frac{nx}{3}\right)$ חסום.

נפריד למקרים:

עבור $x \neq 6\pi k$ **:** הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \cos\left(\frac{nx}{3}\right)$ חסום והסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס. לכן, לפי משפט דיריכלה, הטור הנתון מתכנס.

עבור $x = 6\pi k$: הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{nx}{3}\right)}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n6\pi k}{3}\right)}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi k)}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

מתבדר.

לכן, בסה"כ: ערכי ה x עבורם הטור מתכנס הם $x \neq 6\pi k$.

בהצלחה! ☺