מופשטת 3 תשע"ה - פתרון תרגיל 3

1. חשבו (ונמקו) :

(א) $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{3+\sqrt{5}}, \sqrt[3]{7}] \,:\, \mathbb{Q}\right]$

נשתמש בשני שדות ביניים: $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3+\sqrt{7}}]$ ו- $L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}]$. ונשים לב ש $\mathbb{Q}[\sqrt{3+\sqrt{5}}, \sqrt[3]{7}] = KL$.
$[K:\mathbb{Q}] = 4$ כי $x^4 - 6x^2 + 2$ מתאפס ב $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ והוא אי־פריק אייזנשטיין לפי 2.
$[L:F] = 3$ כי $\sqrt[3]{3}$ מאפס את $x^3 - 3$ שהוא אי־פריק איזנשטיין לפי 2.
K, L הם תתי שדות של KL ולכן $4, 3 \,|\, [KL:\mathbb{Q}]$.
כלומר ש $12 \,|\, [KL:\mathbb{Q}]$.
ומצד שני $[KL:\mathbb{Q}] = [KL:L][L:\mathbb{Q}] \le [K:\mathbb{Q}][L:\mathbb{Q}] = 4 \cdot 3 = 12$.
ולכן $[KL:\mathbb{Q}] = 12$.

(ב) $\left[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}] \,:\, \mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right]$

מכפליות המימד $\left[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}]:\mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}[\sqrt[6]{5}] \,:\, \mathbb{Q}[\sqrt{5}]\right]\left[\mathbb{Q}[\sqrt{5}]:\mathbb{Q}\right]$

2. מצאו דוגמא להרחבות שדות K/F, L/F (לא טריוויאליות):

(א) כך ש $[KL:K] < [L:F]$.

נקח $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, $L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\rho_3]$.
ראינו בתירגול ש $KL = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \rho_3]$ וש- $[KL:L] = 2 < [L:F] = 3$.

(ב) כך ש $[KL:K] = [L:F]$.

נקח $F = \mathbb{Q}$, $L == \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
נשים לב ש $KL = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. ראינו כבר ש- $[KL:K] = 2$ וש- $[L:F] = 2$.

3. הראו שהשדות $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}\rho_3]$ הם איזומורפיים (בנו איזומורפיזם מפורש), אבל הם שונים כקבוצות.

$\sqrt[3]{5}$ ו- $\sqrt[3]{5}\rho_3$ הם שניהם שורשים של הפולינום $x^3 - 5$ שהוא אי־פריק (איזינשטיין לפי 5) ולכן הפולינום המינימלי של שני האיברים האלו.
ראינו שמתקיים $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \cong {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{<x^3-5>} \cong \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}\rho_3]$ ולכן הם איזומורפיים.
אם נעקוב אחרי האיזומורפיזמים האלו נקבל איזומורפיזם: $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}\rho_3]$

המוגדר ע"י $\sqrt[3]{5}\rho_3 \longmapsto \sqrt[3]{5}$. (אפשר לבדוק ישירות שזה אכן איזומורפיזם).
השדות שונים כקבוצות כי $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \subset \mathbb{R}$ כי $\sqrt[3]{5}\rho_3 \notin \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$ ו־$\sqrt[3]{5}\rho_3$ הוא לא ממשי.

4. שחקו במשחק Euclid: The Game ב http://euclidthegame.com עד שלב 8.

5. הוכיחו כי $\sqrt[5]{3}$ והזוית $\alpha = 2\pi/7$ הם לא ברי בנייה.

הפולינום המינימלי של $\sqrt[5]{3}$ הוא $x^5 - 3$ (הוא מתאפס שם, והוא אי־פריק לפי איזנשטיין לפי 3). הדרגה של האיבר היא לא חזקת 2 ולכן האיבר לא בר בנייה.
ניתן לבדוק ש $\cos(3\alpha) - cos(4\alpha) = 0$ ולהשתמש בזהות $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$
ונקבל ש $4\cos^3(\pi/3) - 3\cos(\pi/3) - (8\cos^4(\alpha) - 8\cos^2(\alpha) + 1) = 0$
כלומר ש$\cos(\alpha)$ הוא שורש של הפולינום $8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1$.
קל לזהות ש1 הוא שורש ואז ניתן לפרק את הפולינום הזה
ל $(x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$ הגורם הימני הוא אי־פריק (ננמק את זה להלן) ולכן הדרגה של האיבר היא 3. ולכן הוא לא בר־בנייה.
איך רואים שהפולינום $f = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ אי־פריק?
שיטה א: זהו פולינום מדרגה 3 ולכן הוא פריק אם"ם יש לו שורש רציונלי. ראינו בש.ב. קודמים שאם יש שורש רציונלי a/b אז b מחלק את המקדם העליון ו a את המקדם החופשי. אצלנו זה אומר $a|1$ ו־ $b|8$ כלומר שהאפשריויות הן $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$ אם נציב אותם נראה שהם לא שורשים.
שיטה ב: נציב $f(x+1) = 8x^3 + 28x^2 + 28x + 7$ שהוא אי־פריק לפי איזנשטיין (עם 7) ולכן גם f אי־פריק.

6. הראו ש ρ_5 הוא בר בנייה. הסק שניתן לבנות פנטגון ע"י סרגל ומחוגה.

שימו לב שראינו בתרגול שהפולינום המינימלי של ρ_5הוא $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. כלומר שהוא מדרגה 4. כלומר שהוא מחזקת 2.
נמצא מגדל של שדות: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\rho_5 + \rho_5^4] \subseteq \mathbb{Q}[\rho_5]$. (הערה: הדרך למצוא את המגדל הזה היא בעזרת התאמת גלואה...)
נשים לב שניתן שהקודקודים של פנטגון (שמרכזו בראשית) הם בדיוק שורשי היחידה מסדר חמש. אם ρ_5 הוא בר בנייה, אז ניתן לבנות את כל שורשי היחידה מסדר 5 ואז ניתן לבנות פנטגון.