בס״ד

תורת הקבוצות תרגיל 9 - פתרון

1. א. בהוכחה ראינו שבסדרה, שבה a_n מתכנסת לחסם העליון שלה, M. אומרים שלכל ε, $M-\varepsilon$ לא חסם עליון.
ולכן, יש n כך ש- $M \geq a_n > M-\varepsilon$, ובגלל המונוטוניות זה נכון
לכל $k \geq n$. זה נראה כאילו שמשתמשים באקסיומת הבחירה, בשביל
לבחור לכל ε n כזה. אבל בגלל שהאינדקסים של הסדרה הם מספרים
טבעיים, תמיד אפשר לבחור את ה-n הראשון כך ש- $a_n > M-\varepsilon$, ולכן
אין שימוש באקסיומת הבחירה.

ב. יש שימוש.
בהוכחה טענו צריך פו' מ- $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ל- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$,
שאנחנו יודעים כבר שיש כזו כי $\mathbb{N}$ בעצמו בן מנייה.
צריך לבנות $f:\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ אמרנו שלכל A_i יש פו' חח״ע ועל לתוך
$\mathbb{N}$ (כי הוא בן מנייה), ולכן נשלח $f(a_i) = (i, g_i(a_i))$ ($a_i\in A_i$) כש- $g_i: A_i\to\mathbb{N}$ הפו'
חח״ע ועל.
אבל יש קבוצה של פו' חח״ע ועל מ A_i ל- $\mathbb{N}$, ובעוצמה של הקבוצה הזאת
היא לא בת מנייה, ולכן כדי שנוכל לבחור פו' $g_i: A_i \to \mathbb{N}$ אנחנו חייבים להשתמש
באקסיומת הבחירה.

ג. אין צורך.
נבנה $g: A\to B$ חח״ע, ע״י זה שכל איבר ב- A ילך לאיבר הראשון
של. מכיוון ש B בת מנייה ניתן לסדר שלה את הסדר של $\mathbb{N}$, ולכן לכל
תת קבוצה בעצמה קיים איבר ראשון.

ד. $\Leftarrow$ קיימת $f:\{A_x\}_{x\in I}\to\bigcup_{x\in I}A_x$ כך ש- $f(A_x)\in A_x$ לכל x $\therefore$
ולכן $(f(A_x))_{x\in I}$ היא איבר במכפלה.
$\Rightarrow$ תזכורת: בשביל לבחור איבר מקבוצה אחת לא ריקה אין צורך באקסיומת
הבחירה.
אם $\prod A_x$ לא ריקה, אז יש $a\in\prod A_x$, נבחר אותו. מהגדרה
$a=(a_i)_{i\in I}$ כך שלכל $i\in I$ $a_i\in A_i$. אז נגדיר פו'

בסוף

$f:\{x_i\}\to\bigcup x_i$ כך: $f(x_i)=\sigma_i$.

זאת פו' בחירה.

שימו לב: הוכחנו כאן קיום של פו' בחירה לאוסף של קבוצות לא ריקות. אקסיומת הבחירה דורשת קיום של פו' לאוסף כלשהו כך שלכל x_i לא ריקה, $f(x_i)\in x_i$.

אבל זה שקול. כי אם יש פו' בחירה לאוסף של קבוצות לא ריקות, אז יהי S אוסף כלשהו. ונניח ש-$\emptyset\in S$. אז יש כאן קבוצות לא ריקות. $Z\subseteq S$ תת-קבוצה של הקבוצות הלא ריקות.

יש פו' $f:Z\to\bigcup Z$ כך ש- $f(x)\in x$ לכל $x\in Z$.

וניתן להרחיב אותה בקלות לכל S: על שאר כל הקבוצות הריקות נשלח ל-σ, לאיזשהו $\sigma\in\bigcup S$ קיים, כי $\emptyset\neq\bigcup S$. אפשר לבחור את הפו', כי בחירה מקבוצה אחת לא מצריכה את אקסיומת הבחירה)

3. $\Leftarrow$ נניח את הלמה של צורן.

תהי A קבוצה כמתואר. יהי $a\in A$. נסתכל על $A_a=\{b\in A: b\geq a\}\subseteq A$.

מכיוון שלכל שרשרת עולה ב-A יש חסם מלעיל, גם לכל שרשרת ב-A_a יש חסם מלעיל ב-A. צריך להראות שהוא גם ב-A_a. אבל אם c_i היא שרשרת עולה ב-A_a זה אומר ש- $a\leq c_i$ לכל i, ולכן גם החסם, שהוא גדול מכל c_i, גדול מ-a, כלומר, שייך ל-A_a.

לפי הלמה של צורן, בקבוצה A_a יש איבר מקסימלי. כלומר, יש $b\geq a$ מקסימלי.

$\Leftarrow$ נניח שהטענה נכונה. תהי $A\neq\emptyset$. נבחר $a\in A$. אם לכל שרשרת עולה ב-A יש חסם מלעיל, אז יש $b\in A$ מקסימלי כמו שרצינו. $b\geq a$.

אבל זה אומר שיש מקסימלי, כי אם יש $c>b$, אבל גם $c\geq a$, בסתירה למקסימליות של b.

4. ראשית, נניח שיש סדר של ω ב-A. נגדיר $f:\omega\to A$ חח"ע כך:

$f(0)$ לאיזשהו $a\in A$. לכל n טבעי, $f(n)\in A\setminus\{f(0),\dots,f(n-1)\}$. מכיוון ש-$A$ אינסופית, הקבוצה הזאת לא ריקה אז תמיד נוכל לבחור איבר כלשהו עבור $f(n)$. כעת, $A=\omega\cup\omega'$ עבור $c=f(\omega)$.

נגדיר $g: A \to A\setminus f(0)$

ע"י: $g(x)=x \quad \forall x \in C^c$

$g(f(n)) = f(n+1)$

זאת כי g חח"ע ועל, לכן $A\setminus f(0)$ היא תת-קבוצה אמיתית של A, מאותה עוצמה.

5. לפי הלמה של צורן, מספיק להוכיח שלכל שרשרת עולה ב-D (ביחס להכלה) יש חסם מלעיל.

תהי $\{C_i\}$ שרשרת עולה ב-D. כלומר:

$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$

נקח $\bigcup C_i$, כמובן שלכל i, $C_i \subseteq \bigcup C_i$.

נשאר רק להראות ש- $\bigcup C_i \in D$.

בשביל זה מספיק להראות שכל תת קבוצה סופית של $\bigcup C_i$ היא איבר ב-D.

תהי $E \subseteq \bigcup C_i$ סופית. בגלל ש-E סופית, יש i כך ש- $E \subseteq C_i$

(כי כל איבר ב-E נמצא באיזשהו C_i, ובגלל שיש מס' סופי של כאלה אפשר לקחת את הגדול מביניהם).

אבל מהגדרת D, בגלל ש- $C_i \in D$ ו-E תת קבוצה סופית שלו, $E \in D$.

מש"ל.

6. טענה: קבוצה של משפטים שהינה מקסימלית ביחס לתכונה א' (כלומר, היא מקיימת את תכונה א', וכל קבוצה שמכילה אותה לא מקיימת את תכונה א') מקיימת גם את תכונה ב'.

הוכחה: נניח ש-Σ מקסימלית ביחס לתכונה א'. יהי $\alpha \notin \Sigma$. אם לכל $\beta \in \Sigma$, β-ו α אי-כריעותי, אז $\Sigma \cup \{\alpha\}$ גם מקיימת את תכונה א', בסתירה למקסימליות של Σ.

לכן, צריך להוכיח שיש קבוצה מקסימלית שמקיימת את תכונה א'.

לפי הלמה של צורן, מספיק להוכיח שלכל שרשרת עולה של קבוצות עם התכונה יש חסם מלעיל.

תהי $\{B_i\}$ שרשרת של קבוצות שמקיימות את תכונה א' (צריך להוכיח שבכלל קיימות בכלל קבוצות כאלה, אחרת הכפרה לא קיימת מקסימליות,

המשך

אבל כמובן שכל קבוצה בת איבר אחד תענה על הדרישה.

נסתכל על U. כמובן שהוא חסום מלעיל.

צריך להראות שהוא בעצמו בעל התכונה.

יהיו $a,b \in U$. $a \in B_j$ ו- $b \in B_k$ לאיזשהם j,k.

בה"כ $B_j \subseteq B_k$, כי זאת שרשרת עולה, ולכן $a,b \in B_k$.

אבל ל B_k יש את תכונה א', ולכן $a-b$ אי רציונלי. מש"ל.