פתרון תרגיל בית מספר 7

<u>שאלה 1</u>

f רציפה. מכיון שהנקודונים מהווים בסיס למרחב הדיסקרטי $\mathbb{Z}$, מ"ל שתמונה הפוכה של נקודון היא קבוצה פתוחה. יהי $z\in\mathbb{Z}$. מתקיים

$$f^{-1}\left(\{z\}\right)=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=z\}=\{x\in\mathbb{R}:[x]=z\}=[z,z+1)$$

ומכיון ש $[z,z+1)$ פתוחה (בטופולוגיה של הישר של סורגנפריי) נקבל הדרוש.

<u>שאלה 2</u>

א) תהי $f:X\to Y$.

1) נניח ש $f:X\to Y$ פתוחה ונוכיח ש $f:X\to f(X)$ פתוחה. תהי U פתוחה ב- X. מההנחה מתקיים $f\left(U\right)$ פתוחה ב Y. מתקיים $f\left(U\right)\subseteq f(X)$ ולכן $f\left(U\right)=f(U)\cap f(X)$. מכיון ש $f(U)$ פתוחה ב Y וכן $f\left(U\right)=f(U)\cap f(X)$ נקבל עפ"י הגדרת טופולוגית תת מרחב ש $f\left(U\right)$ פתוחה ב $f\left(X\right)$.

2) ההוכחה של המקרה שבו נתון ש $f:X\to Y$ סגורה וצ"ל ש $f:X\to f(X)$ סגורה, דומה מאד להוכחה של הסעיף הקודם. רק בשלב הסופי יש להיעזר באפיון של קבוצה סגורה בטופולוגית תת מרחב.

ב) 1) דוגמא נגדית לעובדה שמכך ש- $f:X\to f(X)$ פתוחה לא נובע ש- $f:X\to Y$ פתוחה.

יהיו $Y=\mathbb{R},\quad X=\mathbb{Z}$ ו $f=i$ העתקת ההכלה. כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Z}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ פתוחה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Z}$ על $\mathbb{Z}$. אבל, $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי למשל $\mathbb{Z}$ פתוחה ב $\mathbb{Z}$ אבל $i\left(\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

2) דוגמא נגדית שניה: $f:X\to f(X)$ סגורה ו- $f:X\to Y$ אינה סגורה.

יהיו $Y=\mathbb{R},\quad X=\mathbb{Q}$ ו- $f=i$ העתקת ההכלה כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Q}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ סגורה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Q}$ על $\mathbb{Q}$. מצד שני $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה סגורה כי למשל $\mathbb{Q}$ סגורה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i\left(\mathbb{Q}\right)=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

הערה: דוגמא נגדית 2 היתה יכולה לשמש גם כדוגמא נגדית לסעיף 1) שכן הפונקציה $i:\mathbb{Q}\to i(\mathbb{Q})$ היא גם פתוחה והפונקציה $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי $\mathbb{Q}$ פתוחה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

שאלה 3

א) הפונקציה לא רציפה שכן אינה רציפה ב-0. ניתן להוכיח למשל עפ"י היינה $\frac{1}{n}\to 0$ אבל $f_1\left(\frac{1}{n}\right)=n\not\to 1=f_1(0)$.

הפונקציה אינה פתוחה כי למשל $(-1,1)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1\left((-1,1)\right)=[1,\infty)$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה אינה סגורה כי למשל $[0,\infty)$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_1\left([0,\infty)\right)=\{1\}\cup(0,\infty)=(0,\infty)$ ו- $(0,\infty)$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

ב) הפונקציה לא רציפה. ניתן להוכיח זאת למשל ע"י כך ש $\{1\}$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2^{-1}\left(\{1\}\right)=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה אינה פתוחה: $\mathbb{R}$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2(\mathbb{R})=\{0,1\}$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה סגורה: לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ (ובפרט עבור A סגורה) $f_2(A)$ סגורה. אמנם, אם $A=\varnothing$ נקבל $f_2(A)=\varnothing$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{1\}$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{0\}$ ובכל מקרה אחר נקבל $f_2(A)=\{0,1\}$.

ג) הפונקציה רציפה שכן היא מוגדרת באמצעות שתי הפונקציות הבאות: $h(x)=1$, $h:[2,3]\to\mathbb{R},$ $g(x)=x$, $g:[4,5)\to\mathbb{R},$. שתי הפונקציות רציפות (h פונקציה קבועה ו- g פונקציית ההכלה). $\{[2,3],[4,5)\}$ כיסוי פתוח ל X (למעשה $[2,3]$ וכן $[4,5)$ אפילו סגוחות ב X (בדקו!)). $[2,3]\cap[4,5)=\varnothing$. לכן מתקיימים תנאי המשפט שמבטיח רציפות של f_3.

הפונקציה לא פתוחה ולא סגורה שכן $[4,5)$ סגוחה ב X אבל $f_3\left([4,5)\right)=[4,5)$ לא פתוחה ולא סגורה ב $\mathbb{R}$.

<u>שאלה 4</u>

יהי X נורמלי ו A ת"מ סגור שלו. ראשית מכיון שתכונת T_1 תורשתית (ללא קשר לכך ש A סגורה ב X) נקבל ש A מרחב T_1. כעת, יהיו B,C סגורות ב A. מכיון ש A סגורה ב X נקבל ש B,C סגורות ב X. מהנורמליות של X נקבל שקיימות U,V פתוחות ב X המקיימות $C \subseteq V \quad B \subseteq U,$ וכן $U \cap V = \varnothing$. מכיון ש $B,C \subseteq A$ נקבל ש $B \subseteq U \cap A, \quad C \subseteq V \cap A$ ומהגדרת טופולוגית תת מרחב $U \cap A, V \cap A$ פתוחות ב A. לבסוף $U \cap V = \varnothing \Leftarrow (U \cap A) \cap (V \cap A)$. מצאנו את ההפרדה הדרושה להשלמת ההוכחה ש A ת"מ נורמלי.

<u>שאלה 5</u>

B אינו תת מרחב קשיר.

נניח בשלילה ש B כן תת מרחב קשיר של $\mathbb{R}^2$. תהי $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקצית ההטלה על הרכיב הראשון. ראינו כי היא רציפה ולכן גם הפונקציה המתקבלת ע"י צמצום התחום רציפה. כלומר $p_1|_B : B \to \mathbb{R}$ רציפה. פונקציה רציפה מעבירה מרחב קשיר למרחב קשיר ומכאן $p_1(B) = (2,3) \cup (5,8)$ קשיר , אך ברור ש $(2,3) \cup (5,8)$ אינו ת"מ קשיר של $\mathbb{R}$ ומכאן הסתירה.

<u>שאלת בונוס</u>

קיימת פונקציה כזו. נשים לב ש $\mathbb{Z}$ מ״מ דיסקרטי. אם המקור של כל נקודון יהיה קבוצה פתוחה תחת הפונקציה שנבנה, אז דרך איחודים נקבל שמקור של כל תת קבוצה של $\mathbb{Z}$ הוא קבוצה פתוחה. נשים לב שלכל $x \in \mathbb{Q}$ קיים **<u>יחיד</u>** $m \in \mathbb{Z}$ המקיים $x \in (m+\sqrt{2}, m+\sqrt{2}+1) \cap \mathbb{Q}$ (כי המרחק בין קצוות הקטע הפתוח הוא 1 ולכן $x-\sqrt{2}$ שכמובן אינו שלם שייך לאיזשהו אינטרוול $(m, m+1)$ כש $m \in \mathbb{Z}$ **<u>יחיד</u>**). נגדיר $f(x) = m$ ודאי הפונקציה היא על וכן מתקיים לכל $m \in \mathbb{Z}$ $f^{-1}(\{m\}) = (m+\sqrt{2}, m+\sqrt{2}+1) \cap \mathbb{Q}$. $(m+\sqrt{2}, m+\sqrt{2}+1) \cap \mathbb{Q}$ קבוצה פתוחה ב $\mathbb{Q}$ ומכאן הפונקציה רציפה.