מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 9

הגדרה: נניח $(G,\cdot)$ חבורה ו - (G,τ) מ"ט.

אומרים ש - $(G,\cdot,\tau) \in TGr$ חבורה טופולוגית $(Topological\ Group)$ אם מתקיימים:

א. "כפל" $(a,b) \longmapsto a \cdot b$ $G \times G \overset{\cdot}{\to} G$ פונקציה רציפה.

(שקול: $\forall a_1,a_2 \in G\ \forall U \in N(ab)\ \exists V_1 \in N(a_1), V_2 \in N(a_2) \quad V_1V_2 \subseteq U$)

ב. "ההיפוך": $a \longmapsto a^{-1}$ $G \to G$ פונקציה רציפה.

(שקול: $\forall a \in G\ \forall U \in N(a) \quad U^{-1} \in N(a^{-1})$)

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E,+,\tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z},+,top(d_p))$
- טורוס T^n חבורה טופולוגית קומפקטית (מה היא הפעולה ?)
- $GL(n,\mathbb{R})$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרה TGr - (א) $\not\Leftarrow$ (ב).

דוגמה: $(\mathbb{R},+,\tau_s)$ בטופולוגית סורגנפרי.

תזכורת: $\mathbb{R} \supseteq O \in \tau_s \overset{def}{=} \forall\, x \in O\ \exists \epsilon > 0 \colon [x, x+\epsilon) \subseteq O$

למשל $[0,1) \in \tau_s$ פתוחה אבל לא $(-1,0]$ (שהוא מקור של $[0,1)$).

הסבר נוסף: $\lim \frac{1}{n} = 0\ but\ \lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$.

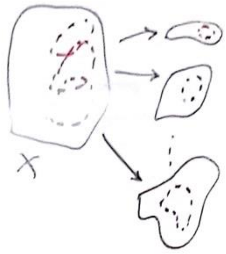
תרגיל: נניח G ח"ט. אז כל הזזה ימנית $T_a: G \to G, T_a(x) = xa$ הומיאומורפיזם (ז"א $T_a \in Homeo(G)$ (נכון גם לשמאלית $_aT: G \to G,\ _aT(x) = ax$).

הסיקו שכל ח"ט היא הומוגנית.

הערה: על חבורות טופולוגיות באתר http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html
ראו קבצים : IntroTopGr.pdf TGrNotes070217.pdf TGrEx.pdf

<u>הגדרה:</u> **טופולוגיה חלשה** $(Weak\ Topology)$.

נניח X קבוצה. $(X_i,\tau_i)\in TOP$, $i\in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $X\overset{f_i}{\to}X_i$. אז



קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש

א. $(X,\tau_w)\overset{f_i}{\to}(X_i,\tau_i)$ רציפות.

ב. בהינתן ש – σ טופולוגיה מסוימת על X כך ש

ג. $(X,\sigma)\overset{f_i}{\to}(X_i,\tau_i)$ רציפות מתקיים $\sigma\supseteq\tau_w$

(ז"א τ_w היא **הכי חלשה כך שמתקיים א'**).

τ_w נקראת **"טופולוגיה חלשה"**. הגדרה פורמלית:

$$\tau_w=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$$

כאשר $\alpha\coloneqq\{f_i^{-1}(O_i)\big|O_i\in\tau_i,i\in I\}$.

לפי הבנייה α פרה-בסיס ל - τ_w ו - $\gamma\coloneqq\alpha^{\cap_F}$ בסיס ל - τ_w.

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב , טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

<u>משפט:</u> (טופולוגיה חלשה)

נניח (Y,σ) מ"ט ונתונה פונקציה $Y\overset{g}{\to}X$.

כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי $X\underset{i\in I}{\overset{f_i}{\to}}(X_i,\tau_i)$.

אזי $Y\underset{i\in I}{\overset{f_i\circ g}{\to}}(X_i,\tau_i)$ רציפות $\Leftrightarrow$ $Y\overset{g}{\to}(X,\tau_w)$ רציפה.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(\Rightarrow)$:</u> ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

<u>$(\Leftarrow)$:</u>

צ"ל $Y\overset{g}{\to}(X,\tau_w)$ רציפה.

ש"ל $\forall O\in\tau_w: g^{-1}(O)\in\sigma$.

מ"ל (על פרה-בסיס = α). ז"א כאשר

$$\exists i \in I: f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O_i)\right) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל <u>רציפות</u> של $f_i \circ g$.

■

<u>תוצאה:</u> τ_w הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

<u>הסבר:</u> זה נובע מהמשפט. אם ניקח $(X, \tau_w) \xrightarrow{g=id} X = Y$. מהרציפות נקבל $\sigma \supseteq \tau_w$.

<u>מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:</u>

- **תת מרחב טופולוגי:**

$(X, \tau) \underset{\text{שיכון}}{\overset{i}{\hookleftarrow}} (Y, ?)$ (Y תת קבוצה של X).

$\tau_Y = \tau_w$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו !).

<u>שימו לב:</u> $\forall O \in \tau \subseteq X: i^{-1}(O) = O \cap Y$

- **מכפלה טופולוגית של n גורמים** $(X_i, \tau_i)\ \ i \in \{1, \cdots, n\}$

$X = (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה ,שמבטיחה רציפות של הטלות

$p_i : (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi) \to (X_i, \tau_i) \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$

מתקיים $\tau_w = \tau_\Pi$ טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו ! $\tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \cdots \times O_i \times \cdots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ פרה-בסיס "תיבות אלמנטריות".

- **הגדרה:** **מכפלה טופולוגית** (אין הגבלה) $(X_i,\tau_i)\ \ i\in I$

$$X=\left\{I\xrightarrow{x}\bigcup_{i\in I}X_i\,,x(i)\in X_i\right\}=\prod_{i\in I}X_i\xrightarrow{p_i}(X_i,\tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל" $x=(x_i)_{i\in I}$ (פונקציות)

היטלים: $p_{i_0}(x)=x(i_0)=x_{i_0}$

מגדירים $\tau_w=\tau_\prod=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$ כטופולוגיה חלשה (טופולוגית *Tychonoff*).

$\alpha:=\{p_i^{-1}(O_i)\mid O_i\in\tau_i\}$ תיבות אלמנטריות. פרה-בסיס סטנדרטי

$\gamma:=\alpha^{\cap_F}=\{\text{תיבות בסיסיות}\}=\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)\mid J\subseteq I \text{ סופי},O_j\in\tau_j\}$ בסיס סטנדרטי

הערות על מכפלה קרטזית $X=\prod_{i\in I}X_i$ **והיטלים** $\prod_{i\in I}X_i\xrightarrow{p_i}X_i$

א. $p^{-1}{}_i(O_i)=O_i\times\prod_{j\in I\setminus\{i\}}X_j$

ב. $p_i^{-1}(O_i)\cap p_k^{-1}(O_k)=O_i\times O_k\times\prod_{j\in I\setminus\{i,k\}}X_j$

ג. $p_k(\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j))=\begin{cases}O_k & if\ k\in J\\ X_k & if\ k\notin J\end{cases}$

ד. $O\in\tau_\prod\Leftrightarrow x=(x_i)_{i\in I}\in O\Rightarrow\exists\ finite\ J\subseteq I\ \exists O_j\in\tau_j\ \ x\in\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j)\subseteq O$

שימו לב: תנאי $x\in\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j)$ שקול ל $x_j\in O_j\quad\forall j\in J$.

- טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:

א. תזכורת: אם ρ פסאודו מטריקה מעל קבוצה X אז

$$top(\rho)=\{\rho\text{ פתוחות במובן }\}=\{B_\rho(x,r)\mid x\in X,r>0\}^{\cup}=\gamma^{\cup}$$

ב. נניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i\in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה X.

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i\in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$$\left\{X\xrightarrow[i\in I]{id}(X,top(\rho_i))\right\}\qquad(\forall i\colon f_i=id\ \text{ז"א})$$

לכן $\tau_w = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha := \{B_{\rho_i}(x,r) |\, x \in X, r > 0, i \in I\}$

"כדורים" פרה-בסיס ל τ_w.

- **טופולוגיה נקודתית** על $X = C[0,1]$ (ניתן להכללות):

עבור $t \in [0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1,f_2) = |f_1(t) - f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}$$

$$\downarrow$$

$$\tau_w(\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}) =: \tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית ($pointwise\ topology$).

<u>הערה:</u> $(C[a,b],\tau_p) \subsetneq top(d_{max})$

המרחב $(C[a,b],\tau_p)$ הוא לא מטריזבילית אבל חשוב באנליזה.

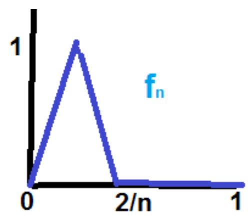
אוסף γ קבוצות הבאות :

$$\gamma = \{V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g): \quad g \in C[a,b], \varepsilon > 0, p_1,p_2,\cdots,p_n \in [a,b]\}$$

$$V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g) = \{f \in C[a,b] : |\, f(p_k) - g(p_k)| < \varepsilon\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה τ_p.

$\tau_p \neq top(d_{\max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n \in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n}) = 1$)



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית τ_p לפונקצית האפס θ (כאשר $\theta(x) = 0$ לכל $x \in [a,b]$.

ראו שכל סביבה של θ מהטיפוס של γ מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה.

אבל אין התכנסות בטופולוגיה של $top(d_{\max})$ כי $d(f_n,\theta) = 1)$ (לא שואף לאפס).

הגדרה: $f:\mathrm{X}\to Y$ נקרה **שיכון טופולוגי** אם פונקציה מושרת $f:\mathrm{X}\to f(X)$ הומיאומורפיזם.

- **טופולוגיה p – אדית:**

$$top(d_p)=\tau_w\left\{\mathbb{Z}\xrightarrow[k\mapsto k+p^n\mathbb{Z}]{f_n}(\mathbb{Z}_{p^n},discr)\quad n\in\mathbb{N}\right\}$$

בעצם פונקצית האלכסון

$$\mathrm{f}=\Delta_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{f}_n:(\mathbb{Z},\mathrm{d}_p)\to\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}\qquad f(x)=(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$

מגדיר שיכון טופולוגי בתוך מכפלה טופולוגית.

($\mathbb{Z}_{p^n}=\{0,1,\cdots,\mathrm{p}^n-1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם p^n איברים).

- **טופולוגיה חלשה על מרחב Hilbert** $(l_2,\|.\|)$ היא טופולוגיה המושרית מאוסף של הפונקציונלים $\{f_a:l_2\to\mathbb{R}\quad f_a(x)=<a,x>:\quad a\in l_2\}$.

הערה: "כדור סגור" $B_r[\theta]$ קומפקטי בטופולוגיה חלשה הנ"ל. לעומת זאת $B_r[\theta]$ לא קומפקטי בטופולוגית מרחב נורמי $(l_2,\|.\|)$ (נלמד !) .

טענה: נניח $f_i:\mathrm{Y}_i\to\mathrm{X}_i$ פונקציות רציפות $\forall i\in I$.

הוכיחו "שפונקצית המכפלה" $f:=\prod_{i\in I}f_i$ הבאה היא רציפה

$$.\ f:\prod_{i\in I}Y_i\to\prod_{i\in I}X_i\qquad f((y_i)_{i\in I})=(f_i(y_i))_{i\in I}$$

הוכחה: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $X=\prod_{i\in I}X_i$, $\mathrm{Y}:=\prod_{i\in I}Y_i$. נסמן ההטלות ב $p_i^{\,Y},\,p_i^{\,X}$. אז יש לנו פונקציה $f:\mathrm{Y}\to X$ כך ש $p_i^{\,X}\circ f=f_i\circ p_i^{\,Y}$. נתון ש f_i רציפה. לכן גם $f_i\circ p_i^{\,Y}$ ששווה ל $p_i^{\,X}\circ f$. לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש f רציפה.

☺

תוצאה: אם כל גורם $f_i:\mathrm{Y}_i\to\mathrm{X}_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$.

$$.\ \mathrm{Y}_i\simeq\mathrm{X}_i\Rightarrow\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}Y_i\simeq\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i$$

דוגמה: $\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}\simeq(-1,1)\times(0,7)\times(5,\infty)\times\mathbb{N}^2$

תרגיל: $S_2\setminus\{z\}\simeq(0,1)\times(2,4)$

הסבר: נזכיר $S_2\setminus\{z\}\simeq\mathbb{R}^2$ $\forall z\in S_2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2\simeq(0,1)\times(2,4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R}\simeq(a,b)$.

תרגיל: $X\times Y\simeq Y\times X$

נסו להוכיח וגם להכליל למקרה של *n* גורמים ותמורות. למשל $X_1\times X_2\times X_3\simeq X_3\times X_2\times X_1$.

משפט: נניח $f_i:Y\to X_i$ פונקציות רציפות. אז "**פונקצית האלכסון**" הבאה $f:=\Delta_{i\in I}f_i$

$$f:Y\to X=(\prod_{i\in I}X_i,\tau_\Pi)\qquad f(y)=(f_i(y))_{i\in I}$$

היא רציפה ומתקיים $f_k=p_k\circ f$ $\forall k\in I$.

הוכחה: $(p_k\circ f)(y)=p_k(f(y))=p_k(f_i(y)_{i\in I})=f_k(y)\quad\forall y\in Y$

נתון ש f_k רציפות (והוכחנו $f_k=p_k\circ f$). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם f .

☺

דוגמה: $f_2:\mathbb{R}\to[-1,1],f_2(t)=\sin t\quad f_1:\mathbb{R}\to[-1,1],f_1(t)=\cos t$

$f(\mathbb{R})=S_1\quad f=f_1\Delta f_2:\mathbb{R}\to[-1,1]\times[-1,1],\ f(t)=(\cos t,\sin t)$.

הגדרה: פונקציה $f:X\to Y$ נקראת *פתוחה* אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה.
באופן דומה מגדירים *פונקציה סגורה*.

דוגמאות:

- נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אם"ם היא סגורה (פתוחה).

  קחו בחשבון $(f^{-1})^{-1}=f$ וקריטריונים לרציפות.

- הפונקציה הנ"ל $f:[0,1)\to T$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
- $f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ 1 & x\in[1,3] \end{cases}$ $\quad f:[0,3]\to[0,1]$ רציפה על (וסגורה, נלמד !)

לא פתוחה (כי $X=(2,3)$ פתוחה ב $[0,3]$ אבל $f[0,3]=\{1\}$ לא פתוחה ב $Y=[0,1]$)

- היטל $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x_1,x_2)\mapsto x_1$ רציפה, על, פתוחה, אבל **לא סגורה** כי $A=\{(x,\frac{1}{x})\mid x>0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^2$ אבל $p_1(A)=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.

__משפט__: (פתיחות הטלות)

כל הטלה $(X_i,\tau_i)\to(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i,\tau_\Pi): p_i$ היא פונקציה **פתוחה**.

הוכחה: צ"ל $p_k(O)\in\tau_k \quad \forall O\in\tau_\Pi$.

אם $O\in\gamma$ תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } J\subseteq I \quad O=\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j)$$

נשתמש בשוויון ג $p_k(O)=p_k(\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j))=\begin{cases} O_k & if\ k\in J \\ X_k & if\ k\notin J \end{cases}$.

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של $O\in\gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש γ בסיס ל τ_Π ותשתמשו ב t_3 (כל פונקציה שומרת איחודים).

☺

__אזהרה:__ מכפלה קרטזית אינסופית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

(בעצם אם ורק אם פתוחה אם כמעט כל הגורמים הם מרחבים עצמם בהתאמה).

$\left(\frac{1}{2},3\right)^{\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2},3\right)\times\left(\frac{1}{2},3\right)\times\ldots$ **לא פתוחה** ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(a,b)^{\mathbb{N}}$ __לא פתוחה__ ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

__הסבר:__ $X=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$

כאן $I=\mathbb{N} \qquad (X_n,\tau_n)=\mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש - $(a,b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז $(a,b)^{\mathbb{N}}\in\tau_\pi=\gamma^\cup$. לכן

$\Leftarrow (a,b)^{\mathbb{N}}$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל ... $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \subseteq (a,b) \times (a,b) \times \ldots$.

אבל זה גורר $\mathbb{R} \subseteq (a,b)$, סתירה!

<u>טענה שימושית</u>: במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ בסיס ל $\tau_{\prod}$.

עבור מכפלה אינסופית: $\left\{\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j) \middle| J \subseteq I, O_j \in \gamma_j \text{ סופי} \right\}$

תרגיל: הוכיחו:

א. $cl(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} cl(A_i)$ לכל $A_i \subseteq (X_i, \tau_i)$ (אין הגבלה על I).

ב. $\operatorname{int}(A_1 \times A_2) = \operatorname{int}(A_1) \times \operatorname{int}(A_2)$ (נכון לכל מספר **סופי**).

ג. תנו דוגמה שבה $\operatorname{int}(\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i) \neq \prod_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{int}(A_i)$

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...

- (מכפלות סופיות ובנות מניה)

$\cdots, Sep, B_1, B_2, Metriz, \cdots$

- (מכפלות סופיות)

$discr$, קומפקטיות מקומית (נלמד !)

<u>**הערה**</u>: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (אפילו בת מנייה).

למשל $C \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \notin discr$ הומיאומורפי לקבוצת קנטור (נלמד !)

<u>**הערה:**</u> מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in Metr$$

$$\to \Big(X_1, \underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1}\Big), \Big(X_2, \underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2}\Big) \in TOP$$

<u>טענה:</u> יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_π "מטריקת מכפלה".

א) "מטריקה בסגנון אוקלידס"

$$d(x,y) \coloneqq \sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2 + \rho_2(x_2,y_2)^2}$$

ב) $d_1(x,y) \coloneqq \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$

ג) $d_{max}(x,y) \coloneqq \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$

<u>תרגיל:</u>

א) $d \sim d_1 \sim d_{max}$ מ $X \coloneqq X_1 \times X_2$.

ב) $\underbrace{\tau_\pi}_{\text{טופולוגית מכפלה}} = \underbrace{top(d) = top(d_1) = top(d_{max})}_{(\text{א}) \Rightarrow}$

<u>מטריזציה במקרה של מכפלה בן מנייה</u>:

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \rho_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots$$

$d(x,y) \coloneqq \sup\{\frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ אחת מהאפשרויות.