# תרגול 7 בדידה להנדסה

22 בינואר 2015

**הגדרה:**

תהיינה $A, B, C$ קבוצות ויהיו $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$. ההרכבה בין היחסים היא יחס על $A \times C$ המוגדר כך:

$$R \circ S = \{(a,c) | \exists b \in B.((a,b) \in R) \wedge ((b,c) \in S)\}$$

כלומר, אם יש "איבר מקשר" מהקבוצה $B$ שנמצא גם בזוג ב־$R$ עם איבר מ־$A$ (שבו הוא האיבר השני) וגם בזוג ב־$S$ עם איבר מ־$C$ (שבו הוא האיבר הראשון).

<u>סימון:</u>

בהינתן יחס $R \subseteq A \times B$, הסימון $xRy$ פירושו $(x,y) \in R$. נאמר ש־$x$ מתייחס ל־$y$.

**הגדרה:**

בתרגול הקודם הזכרנו כמה תכונות של יחסים.

כעת, נאמר שיחס $R$ על קבוצה $A$ הוא **יחס שקילות** אם הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

<u>לדוגמה:</u>

1.נתבונן בקבוצה $A = \{1,2,3,4\}$.

היחס $R = \{(1,2),(3,3),(2,3),(2,2),(1,1)\}$ אינו יחס שקילות מכיוון שהוא אינו סימטרי ($(1,2) \in R, (2,1) \notin R$).

היחס $S = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,1),(4,4),(2,1),(3,2),(1,3),(1,2),(3,3)\}$ הוא יחס שקילות מכיוון שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

היחס $T=\{(1,1),(2,1),(1,2).(4,4)\}$ אינו יחס שקילות מכיוון שהוא אינו טרנזיטיבי ($(2,1),(1,2)\in R,(2,2)\notin R$).

2. נתבונן בקבוצה $B=\mathbb{Z}$.

נתבונן ביחס $xRy \iff 5|(x-y)$.

היחס הוא רפלקסיבי, מכיוון שלכל $x\in B$, $5|(x-x)$ ולכן $(x,x)\in R$.

היחס הוא סימטרי, כי אם $(x,y)\in R$ אז $5|(x-y)$ ומכיוון ש-$x-y=-(y-x)$ נקבל שגם $5|y-x$ ולכן $(y,x)\in R$.

היחס הוא טרנזיטיבי, כי אם $(x,y),(y,z)\in R$ אז $5|(x-y),5|(y-z)$ ומכיוון ש-$(x-y)+(y-z)=(x-z)$ נקבל שגם $5|(x-z)$ ולכן $(x,z)\in R$.

אם כן, היחס $R$ הוא יחס שקילות.

<u>תרגיל:</u>

תהי $A$ קבוצה ויהיו $R_1,R_2$ יחסי שקילות עליה. האם $R_1\cap R_2$ הוא יחס שקילות?

<u>פתרון:</u>

נבדוק האם שלוש התכונות מתקיימות.

1. רפלקסיביות: יהי $a\in A$. מכיוון ש-$R_1,R_2$ יחסי שקילות, הם רפלקסיביים, ולכן: $(a,a)\in R_1,(a,a)\in R_2$. לפי הגדרת חיתוך, $(a,a)\in R_1\cap R_2$ ולכן היחס רפלקסיבי.

2. סימטריות: יהי $(a,b)\in R_1\cap R_2$. צ"ל $(b,a)\in R_1\cap R_2$ לפי הגדרת חיתוך, $(a,b)\in R_1,(a,b)\in R_2$. מכיוון ש-$R_1,R_2$ יחסי שקילות, הם סימטריים, ולכן: $(b,a)\in R_1,(b,a)\in R_2$. מהגדרת חיתוך נובע: $(b,a)\in R_1\cap R_2$ ולכן היחס הוא סימטרי.

3. טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(b,c)\in R_1\cap R_2$. צ"ל $(a,c)\in R_1\cap R_2$. לפי הגדרת חיתוך, $(a,b),(b,c)\in R_1,(a,b),(b,c)\in R_2$. מכיוון ש-$R_1,R_2$ יחסי שקילות, הם טרנזיטיביים, ולכן: $(a,c)\in R_1,(a,c)\in R_2$. מהגדרדת חיתוך נובע: $(a,c)\in R_1\cap R_2$ ולכן היחס הוא טרנזיטיבי.

סה"כ, נקבל ש-$R_1\cap R_2$ הוא אכן יחס שקילות.

**הגדרה:**

תהי $A$ קבוצה ויהי $R$ יחס שקילות עליה. מחלקת השקילות של איבר $a\in A$ היא

הקבוצה:

$$[a]_R = \{b \in A | (a,b) \in R\}$$

כלומר, כל האיברים שמתייחסים ל־$a$ לפי היחס $R$.

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בדוגמה קודמת: $A = \{1,2,3,4\}$ ו־$R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,1),(4,4),(2,1),(3,2),(1,3),(1,2),(3,3)\}$,
נשים לב שלאיבר $1 \in A$ מתייחסים האיברים $1,2,3$ ולכן:

$$[1]_R = \{1,2,3\}$$

לאיבר $4 \in A$ מתייחס רק האיבר $4$ ולכן:

$$[4]_R = \{4\}$$

שימו לב שמחלקות השקילות של איברים שמתייחסים זה לזה זהות. הדבר נכון בכל יחס שקילות.

כלומר, אם $A$ קבוצה ו־$R$ יחס שקילות עליה, אז לכל $a,b \in A$ אם $(a,b) \in R$ אז $[a]_R = [b]_R$.

מחלקת שקילות היא תמיד תת קבוצה של הקבוצה עליה מוגדר היחס.

**הגדרה:**

תהי $A$ קבוצה ויהי $R$ יחס שקילות עליה. קבוצת המנה היא הקבוצה:

$$A/R = \{[a]_R | a \in A\}$$

כלומר קבוצת כל מחלקות השקילות.

<u>לדוגמה:</u>

אם נמשיך בדוגמה שלנו, $A=\{1,2,3,4\}$ ו־$R=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,1),(4,4),(2,1),(3,2),(1,3),(1,2),(3,3)\}$, נקבל:

$$^{A}/_{R}=\{[1]_R,[4]_R\}=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$