# חשבון אינפי מתקדם

## תרגיל 10 - פתרון

**1.** חשבו אינטגרלים מסוג ראשון :

**א.** $\int_L (x+y)\,dl$ $L$ - משולש עם קודקודים $(0,0),(1,0),(0,1)$

**פתרון:** נסמן : $L_1$ קטע מ $(0,0)$ ל $(1,0)$

$L_2$ קטע מ $(1,0)$ ל $(0,1)$

$L_3$ קטע מ $(0,1)$ ל $(0,0)$

פרמטריזציה של $L_1$ : $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

פרמטריזציה של $L_2$ : $\begin{cases} x=t \\ y=-t+1 \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

פרמטריזציה של $L_3$ : $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

ולכן

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_{L_1} (x+y)\,dl + \int_{L_2} (x+y)\,dl + \int_{L_3} (x+y)\,dl$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 \big(t+(-t+1)\big)\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \sqrt{2} + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \sqrt{2}+1$$

**ב.** $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ $L$ - קטע שקצותיו $(0,0),(1,2)$

**פתרון:**

פרמטריזציה של $L$: $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

$$\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{t^2+4t^2+4}}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+4/5}}$$

$$= \left.\ln\left(t+\sqrt{t^2+4/5}\right)\right|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{9/5}\right) - \ln\left(\sqrt{4/5}\right) = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

**ג.** $\int_L y\,dl$ $L$ - קשת של ציקלואידה $\begin{cases} x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t) \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

**פתרון:**

$$\int_L ydl = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt = a^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)}\,dt$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=p\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}=dp\end{array}\right\}$$

$$= 4a^2\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + 8a^2\int_1^{-1}p^2dp = 16a^2+\frac{8}{3}a^2p^3\Bigg|_1^{-1} = 16a^2-\frac{16}{3}a^2 = \frac{32}{3}a^2$$

**ד.** $\int_L (x^2+y^2+z^2)dl$ $L$ - נתון ע"י $\begin{cases}x=a\cos t\ ,\ y=a\sin t\ ,\ z=bt\\ 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

**פתרון:**

$$\int_L (x^2+y^2+z^2)dl = \int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2a^2\pi\sqrt{a^2+b^2}+\frac{t^3}{3}b^2\sqrt{a^2+b^2}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2a^2\pi\sqrt{a^2+b^2}+\frac{8\pi^3}{3}b^2\sqrt{a^2+b^2}$$

**2.** חשבו אינטגרלים מסוג שני :

**א.** $\int_\Gamma\left(x-\frac{1}{y}\right)dy$ $\Gamma$ - קשת של פרבולה $\begin{cases}y=x^2\\ 1\le x\le 2\end{cases}$

**פתרון:**

פרמטריזציה של $\Gamma$: $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\\ 1\le t\le 2\end{cases}$

$$\int_\Gamma\left(x-\frac{1}{y}\right)dy = \int_1^2\left(t-\frac{1}{t^2}\right)2tdt = \frac{2}{3}t^3-2\ln t\Bigg|_1^2 = \frac{14}{3}-2\ln 2$$

**ב.** $\int_\Gamma 2xydx+x^2dy$ $\Gamma$ - קשת של פרבולה $\begin{cases}y=x^2/4\\ 0\le x\le 2\end{cases}$

**פתרון:**

פרמטריזציה של $\Gamma$: $\begin{cases}x=t\\ y=t^2/4\\ 0\le t\le 2\end{cases}$

$$\int_{\Gamma} 2xydx + x^2dy = \int_0^2 \left(\frac{t^3}{2} + t^2 \cdot \frac{t}{2}\right)dt = \int_0^2 t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^2 = 4$$

**ג.** $\int_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)dx - xdy$ לאורך רבע המעגל $x^2+y^2=1$

מנקודה $(1,0)$ עד הנקודה $(0,1)$.

<u>**פתרון:**</u>

פרמטריזציה של $\Gamma$ : $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ 0\le t\le \pi/2 \end{cases}$

$$\int_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)dx - xdy = \int_0^{\pi/2}\left((-\sin t)-\cos^2 t\right)dt = \int_0^{\pi/2}\left((-\sin t)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$= \left.\cos t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right|_0^{\pi/2} = -1-\frac{\pi}{4}$$

**ד.** $\int_{\Gamma} yzdx - xzdy + xydz$ $\Gamma$ - עקומה $\begin{cases} x=e^t \ , \ y=e^{3t} \ , \ z=e^{-t} \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

<u>**פתרון:**</u>

$$\int_{\Gamma} yzdx - xzdy + xydz = \int_0^1\left(e^{3t}\cdot e^{-t}\cdot e^t - e^t\cdot e^{-t}\cdot 3e^{3t} + e^t\cdot e^{3t}\cdot\left(-e^{-t}\right)\right)dt$$

$$= \int_0^1\left(-3e^{3t}\right)dt = \left.-e^{3t}\right|_0^1 = -e^3+1$$

**3.** חשבו את המסה של תיל דק המעוצב בצורת הקשת המעגלית $0\le x\le 3$ , $y=\sqrt{9-x^2}$ , כאשר

פונקצית הצפיפות היא : $k>0$ , $\delta(x,y)=kx\sqrt{y}$ .

<u>**פתרון:**</u>

נחשב את המסה באמצעות אינטגרל קווי מסוג ראשון:

$m=\int_L kx\sqrt{y}dl$ כאשר $L$ נתון ע"י $\begin{cases} y=\sqrt{9-x^2} \\ 0\le x\le 3 \end{cases}$

פרמטריזציה של $L$ : $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \\ 0\le t\le \pi/2 \end{cases}$

$$m=\int_L kx\sqrt{y}\,dl=k\int_0^{\pi/2}3\cos t\sqrt{3\sin t}\sqrt{\left(-3\sin t\right)^2+\left(3\cos t\right)^2}\,dt=3k\int_0^{\pi/2}3\cos t\sqrt{3\sin t}\,dt$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3\sin t=p & t=0\ \Rightarrow p=0 \\ 3\cos t\,dt=dp & t=\pi/2\Rightarrow p=3 \end{array}\right\}$$

$$=3k\int_0^3 p^{1/2}dp=2kp^{3/2}\Big|_0^3=6k\sqrt{3}$$

**.4** חשבו את העבודה המבוצעת כאשר חלקיק נע על הפרבולה $x=y^2$ מ- $(0,0)$ עד $(1,1)$, בשעה שפועל עליו כוח : $\mathbf{F}(x,y)=xy\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$

<u>**פתרון:**</u> נסמן את העבודה ע"י $W$ , אזי

$W=\int_\Gamma xydx+x^2dy$ כאשר $\Gamma$ נתון ע"י $x=y^2$ מ- $(0,0)$ עד $(1,1)$.

פרמטריזציה של $\Gamma$: $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

$$W=\int_\Gamma xydx+x^2dy=\int_0^1\left(t^3\cdot 2t+t^4\right)dt=\int_0^1\left(3t^4\right)dt=\frac{3}{5}t^5\Big|_0^1=\frac{3}{5}$$

**.5** חשבו את העבודה שמבצע כוח : $\mathbf{F}(x,y,z)=(x+y)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ הפועל על החלקיק שנע לאורך קטע הישר מ- $(0,0,0)$ עד $(1,3,1)$ , ומשם לאורך קטע הישר מ- $(1,3,1)$ ל- $(2,-1,4)$ .

<u>**פתרון:**</u> נסמן את העבודה ע"י $W$ , אזי

$$W=\int_{\Gamma_1}(x+y)dx+xydy+z^2dz+\int_{\Gamma_2}(x+y)dx+xydy+z^2dz$$

כאשר $\Gamma_1$ קטע הישר מ- $(0,0,0)$ עד $(1,3,1)$

$\Gamma_2$ קטע הישר מ- $(1,3,1)$ עד $(2,-1,4)$

פרמטריזציה של $\Gamma_1$: $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

פרמטריזציה של $\Gamma_2$: $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-4t \\ z=1+3t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$

$$W=\int_0^1\left(4t+9t^2+t^2\right)dt+\int_0^1\left((4-3t)-4(1+t)(3-4t)+3(1+3t)^2\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(4t+10t^2\right)dt+\int_0^1\left((4-3t)-4(3-t-4t^2)+3(1+3t)^2\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(4t+10t^2\right)dt+\int_0^1\left((-8+t+16t^2)+3(1+3t)^2\right)dt$$

$$=2t^2+\frac{10}{3}t^3-8t+\frac{t^2}{2}+\frac{16}{3}t^3+\frac{(1+3t)^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{49}{2}$$

**.6** קבעו האם $\mathbf{F}(x,y)=(\cos y+y\cos x)\mathbf{i}+(\sin x-x\sin y)\mathbf{j}$ הוא שדה משמר.
אם $\mathbf{F}$ משמר מצאו לו פונקצית פוטנציאל.

**<u>פתרון:</u>** נסמן

$$P(x,y)=\cos y+y\cos x$$
$$Q(x,y)=\sin x-x\sin y$$

$P(x,y)\,,\,Q(x,y)\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ ולכן כדי להראות ש $\mathbf{F}(x,y)$ הוא שדה משמר

מספיק להראות ש $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\sin y+\cos x\quad,\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x-\sin y\quad\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ולכן $\mathbf{F}(x,y)$ הוא שדה משמר

נמצא את הפוטנציאל, ז"א צריך למצוא פונקציה $\varphi(x,y)$ המקיימת $\mathbf{F}(x,y)=\nabla\varphi(x,y)$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos y+y\cos x\quad\Rightarrow\varphi(x,y)=x\cos y+y\sin x+g(y)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin x-x\sin y\quad\Rightarrow\sin x-x\sin y=-x\sin y+\sin x+g'(y)$$
$$\Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow g(y)=const$$
$$\Rightarrow\varphi(x,y)=x\cos y+y\sin x+const$$

**.7** הראו שהאינטגרל $\int_{(1,2)}^{(4,0)}3ydx+3xdy$ אינו תלוי במסלול וחשבו אותו.

**<u>פתרון:</u>**

כדי להראות שהאינטגרל לא תלוי במסלול מספיק להראות ש $\mathbf{F}(x,y)=3y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}$ הוא שדה משמר.
$P(x,y)\,,\,Q(x,y)\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ ולכן כדי להראות ש $\mathbf{F}(x,y)$ הוא שדה משמר מספיק להראות
$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\left.\begin{aligned} P(x,y)=3y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=3 \\ Q(x,y)=3x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

נמצא את הפוטנציאל, ז"א צריך למצוא פונקציה $\varphi(x,y)$ המקיימת $\mathbf{F}(x,y)=\nabla\varphi(x,y)$.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}=3y \quad \Rightarrow \varphi(x,y)=3yx+g(y) \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y}=3x \quad \Rightarrow 3x=3x+g'(y) \\ &\qquad\qquad \Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=const \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \varphi(x,y)=3xy+const \end{aligned}$$

ולכן

$$\int_{(1,2)}^{(4,0)} 3ydx+3xdy=\varphi(4,0)-\varphi(1,2)=-6$$

**טל"ח**

**בהצלחה במבחנים!!!**