אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 2

שאלה 1

פתרו את האי שוויונות הבאות:

1. $\log_{x+1}(x^2-1)<\log_{x+1}(2x+2)$

תחום ההגדרה:

$2x+2>0$ וגם $x^2-1>0$

$2x>-2$ וגם $(x-1)(x+1)>0$

$x>-1$ וגם $x>1, x<-1$

ולכן סה"כ קיבלנו: $x>1$

נחלק למקרים:

א. $0<x+1<1$

$-1<x<0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$x^2-1>2x+2$

$x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

ולכן: $x<-1$ או $x>3$

סך הכל קיבלנו: $x>1$ וגם $-1<x<0$ וגם ($x<-1$ או $x>3$)

ולכן אין פתרון במקרה זה.

ב. $x+1>1$

$x>0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$x^2-1<2x+2$

$x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$

ולכן: $-1<x<3$

סך הכל קיבלנו: $x>1$ וגם $x>0$ וגם $-1<x<3$

ולכן הפתרון במקרה זה: $1<x<3$

2. $(x+1)^{x^2}<(x+1)^{2x}$

נחלק למקרים:

א. $x+1>1$

$x>0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$x^2 < 2x$

$x^2 - 2x < 0$

$x(x-2) < 0$

ולכן $0 < x < 2$

סך הכל קיבלנו: $x > 0$ וגם $0 < x < 2$

ולכן הפתרון במקרה זה: $0 < x < 2$

ב. $0 < x+1 < 1$

$-1 < x < 0$

במקרה זה, זה שקול לפתירת האי שוויון הבא:

$x^2 > 2x$

$x^2 - 2x > 0$

$x(x-2) > 0$

ולכן $0 < x < 2$

סך הכל קיבלנו: $-1 < x < 0$ וגם ($x < 0$ או $x > 2$)

ולכן במקרה זה הפתרון הוא $-1 < x < 0$

פתרון שאלה 2

הוכיחו שהגבול של הסדרה $a_n = \frac{2n-1}{3n}$ הוא: $\frac{2}{3}$

<u>הוכחה:</u>

יהי $\varepsilon > 0$ ונרצה להראות שקיים n_0 כל שלכל $n \ge n_0$ מתקיים: $\left|\frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$

נשים לי כי: $\left|\frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3n}$

ולכן: $\left|\frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \varepsilon$

נבחר $n_0 > \frac{1}{3\varepsilon}$ ואכן יתקיים כי לכל $n \ge n_0$ מתקיים:

$$\left|\frac{2n-1}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3n} \le \frac{1}{3n_0} < \varepsilon$$