

## תרגיל בית 4 מבוא לתורת החבורות 88-211 סמסטר א' תשע"ז

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך י"א כסלו ה'תשע"ז, 11.12.2016.

### שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

**שאלה 1.** כמה תת-חבורות יש ל- $\mathbb{Z}_{30}$ ? בכמה מהן יש איבר מסדר 2?

**שאלה 2.** מצאו איבר מסדר 6 בחבורה  $S_5$ . רמז: מצאו איבר מסדר 2 ב- $S_2$  ואיבר מסדר 3 ב- $S_3$ .

**שאלה 3.** תנו דוגמה לחבורה אינסופית שנוצרת סופית. תנו דוגמה שהחבורה גם לא אבלית. אם גם נדרוש שקיימת קבוצת יוצרים בגודל נתון ושהסדר של כל איבר חסום, זו הופכת להיות שאלה הרבה יותר קשה. למידע נוסף, קראו על בעיית ברנסייד בויקיפדיה.

### שאלות להגשה

**שאלה 4.** תהי  $G$  חבורה.

א. מצאו את התמורות  $\sigma \in S_3$  כך שלכל חבורה  $G$  ולכל  $x_1, x_2, x_3 \in G$  מתקיים

$$o(x_1 x_2 x_3) = o(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)})$$

רמז: הזכרו בתרגיל הבית הקודם בו הוכחתם כי לכל  $a, b \in G$  מתקיים  $o(ab) = o(ba)$ .

ב. עבור התמורות  $\sigma \in S_3$  שלא נכללו בסעיף הקודם, תנו דוגמה נגדית באופן מפורש. רמז: אפשר לבחור  $G = S_3$ .

**שאלה 5.** תהינה  $H, K \leq G$  שתי תת-חבורות של  $G$ . הוכיחו או הפריכו:

א.  $H \cup K$  היא גם תת-חבורה של  $G$ .

ב.  $HK$  היא גם תת-חבורה של  $G$ , כאשר  $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ .

**שאלה 6.** הוכיחו שהחבורה  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  היא ציקלית אם ורק אם  $(n, m) = 1$ .

**שאלה 7.**

א. הוכיחו כי  $(\mathbb{Q}, +)$  אינה נוצרת סופית.

ב. יהי  $p$  ראשוני. מצאו חבורה אינסופית שהסדר של כל תת-חבורה ציקלית שלה שייך לקבוצה  $\{1, p, p^2, p^3\}$ . רמז: נסו להרחיב את המקרה הסופי של  $\mathbb{Z}_p$ .

**שאלה 8.**

א. הוכיחו:  $S_3 = \langle (12), (123) \rangle = \langle (12), (23) \rangle$ . (למה אי אפשר למצוא קבוצת יוצרים קטנה יותר?)

ב. מצאו את כל איברי תת-החבורה  $S_4 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \leq S_4$ . האם היא איזומורפית ל- $U_{10}$ ?

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 9.** תהי  $I$  קבוצה מכוונת (כלומר  $I$  היא קבוצה סדורה חלקית כך שלכל  $i, j \in I$  קיים  $k \in I$  כך ש- $k > i, j$ ). מערכת של חבורות  $\{G_i\}_{i \in I}$  נקראת רשת עולה אם לכל  $i < j$  מתקיים  $G_i \subseteq G_j$ .

הוכיחו שבמקרה זה  $\bigcup_{i \in I} G_i$  היא חבורה. בפרט, אם ישנה שרשרת עולה של חבורות  $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ , אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.

**שאלה 10.** הוכיחו שלחבורה  $U_{40}$  אין קבוצת יוצרים של שני איברים, ומצאו קבוצת יוצרים עם שלושה איברים. האם  $U_{40} \cong U_{48}$ ?

בהצלחה!