<u>הכנה לקורס תורת השדות</u>

<u>(רשימה של משפטים שבהם ניעזר במהלך הסמסטר)</u>

חוגים

I. <u>משפטי NOETHER</u>:

אם $f:R\to W$ הומומורפיזם של חוגים ו $I\lhd R$ כך ש $I\subseteq \ker f$, אז קיים הומומורפיזם $\overline{f}:R/I\to W$ לפי $\begin{matrix}\overline{f}\left(r+I\right)=f(r)\\ \ker\overline{f}=\ker f/I\end{matrix}$.

לכן $\overline{f}$ הוא 1:1 אם ורק אם $I=\ker f$, כלומר $R/\ker f\to W$. גם $\overline{f}$ על אם ורק אם f על.

אידיאל P של R הוא ראשוני $\Leftrightarrow$ R/P תחום שלמות; P אידיאל מקסימלי $\Leftrightarrow$ R/P שדה. לכן כל אידאל מקסימלי הוא ראשוני.

II. תכונות של $F\left[\lambda\right]$ כאשר F שדה ו- λ משתנה:

- תחום שלמות
- אלגוריתם אוקלידי: נתון $f\left(\lambda\right),g\left(\lambda\right)$ פולינומים. קיימים $q(\lambda),r\left(\lambda\right)$ כך ש $f=qg+r$ ו ($r=0$ או $\deg r<\deg g$).
- $F(\lambda)$ תחום ראשי (כל אידיאל הוא בצורה $F(\lambda)f$).
- מספר שורשים של פולינום מדרגה n הוא $\leq n$.
- כל אידיאל ראשוני $\neq 0$ של $F\left[\lambda\right]$ הוא אידיאל מקסימלי.

חבורות

I. $S_n=$ חבורת התמורות של $\{1,...,n\}$.

$A_n=$תת חבורה של התמרות הזוגיות. $A_n\lhd S_n$ ו- $\left|S_n/A_n\right|=2$.

A_n חבורה פשוטה אם $n\geq 5$.

$K_4=$ <u>חבורת קליין</u> תת חבורה נורמלית של S_4 מסדר 4 $\left(K_4=\left\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\right)\right.$.

$D_n=$ <u>החבורה הדיהדרלית מסדר</u> $2n$, תת חבורה של S_n נוצרת על ידי $a=\left(12...n\right)$ ו $b=\left(1n\right)\left(2n-1\right)\ldots$.

שימו לב $a^n=\left(1\right)=b^2$ ו $bab^{-1}=a^{n-1}$.

II. משפט CAYLEY: כל חבורה מסדר n היא איזומורפית לתת חבורה של S_n.

III. אם H תת חבורה של G ו- $\left[G:H\right]=2$, אז $H\lhd G$.

IV. <u>המרכז</u> $Z\left(G\right)=\left\{Z\in G:gz=zg,\forall_g\in G\right\}$. אם $\left|G\right|=p^t$ עבור p ראשוני אז $Z\left(g\right)\neq(1)$.

V. <u>משפטי Sylow</u>: אם $\left|G\right|=p^tq$ כאשר p מס' ראשוני ו- p זר ל- q, אז קיימת תת חבורה של G מסדר p^t.

VI. <u>המשפט היסודי של חבורות אבליות</u>: כל חבורה אבלית סופית היא מכפלה ישירה של חבורות ציקליות.

שדות

I. כל תת חבורה כפלית סופית של שדה היא ציקלית.

II. המעגל המרוכב ושורשי יחידה ($e^{2\pi i/n}$, הוא שורש n של 1).
קריטריון EISENSTEIN לפולינומים אי פריקים.

מרחבי וקטורים

I. בסיס, מימד (לא תלוי על בחירת הבסיס).

II. אם $F \subset K \subset V$ כאשר V מרחב וקטורי מעל K, אז $[V:F]=[V:K][K:F]$.