

תרגיל 10

27 במאי 2015

1. הוכיחו את אי־שוויון בסל: יהי V ממ"פ, ותהי $\{x_1, \dots, x_n\}$ קבוצה אורתונורמלית, ויהי x וקטור כלשהו. אזי:

$$\sum |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

הדרכה: א. השלימו את הקבוצה לבסיס אורתונורמלי של V (הסבירו איך אתם עושים את זה)

ב. הציגו את x כצ"ל של איברי הבסיס.

ג. שימו לב: למה שווה $\langle x, x_i \rangle$?

2. השתמשו באי"ש בסל כדי להוכיח את אי"ש קושי-שוורץ: לכל $x, y \in V$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

הדרכה: "הפכו" את y לקבוצה אורתונורמלית.

כדאי להעלות את כל האי"ש בריבוע.

3. הוכיחו שבאי"ש קושי-שוורץ מתקיים שוויון אמ"ם x, y ת"ל.

הדרכה: כיוון אחד קל.

לכיוון השני קחו $\alpha = \frac{\|\gamma x\|}{\|y\|}$, $\gamma = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$. והוכיחו ש $\gamma x - \alpha y = 0$.

4. מצא בסיס אורתו נורמלי ל $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית:

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

5. יהי $\mathbb{R}_2[x]$ עם הבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$. צרו ממנו בסיס אורתונורמלי עבור המכפלות פנימיות הבאות:

$$\langle p_1 p_2 \rangle = 3a_1 a_2 + 2b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad \text{א.}$$

$$\langle p_1 p_2 \rangle = \int_0^1 p_1(x) p_2(x) dx \quad \text{ב.}$$

$$p_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad \text{כאשר:}$$

6. יהי $B = \{(i, i, 0), (0, i, i), (i, 0, i)\}$ בסיס ל \mathbb{C}^3 . מצאו בסיס אורתונורמלי
ביחס למכפלה הפינימית הסטנדרטית, $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ כך שמתקיים: $\text{span}\{v_1\} =$
 $\text{span}\{v'_1\}$ וכן $\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\{v'_1, v'_2\}$.