חלק שני- עם פתרונות מקוצרים

איזומטריות

1. הגדרה: יהו (X,d) ו(Y,ρ) שני מרחבים מטריים. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת איזומטריה אם f על וכן מתקיים: לכל $x_1,x_2\in X$

$$\rho(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)$$

2. הערה: כל איזומטריה היא פונקציה חח"ע.
הסבר: נניח $f(x_1)=f(x_2)$. אז $\rho(f(x_1),f(x_2))=0$. ולכן $d(x_1,x_2)=0$. מכאן נקבל ש$x_1=x_2$.

3. פונקציה שמקיימת רק את התנאי השני (כלומר, שומרת מרחק) אבל לא בהכרח על, נקראת "שיכון איזומטרי".

4. תרגיל: יהי $f:(X,d)\to(X,d)$ שיכון איזומטרי. האם f בהכרח על?
פתרון: לא. נסו לבנות שיכון איזומטרי שאינו על מl_∞ לעצמו.

התכנסות

1. הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי, $x\in X$ ו$(x_n)\subseteq X$ סדרה. נאמר שהסדרה (x_n) מתכנסת לx, ונסמן $x_n\to x$ אם מתקיים: לכל $0<\epsilon\in\mathbb{R}$, קיים n_0, כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n\in B(x,\epsilon)$. שקול: $d(x_n,x)<\epsilon$. במילים: החל ממקום מסויים, כל איברי הסדרה נמצאים בכדור. במילים אחרות: החל ממקום מסוים בסדרה, המרחק של כל איברי הסדרה מx קטן מϵ.

2. בהרצאה הוכחתם את השקילות הבאה: $x_n\to x$ אמ"ם $d(x_n,x)\to 0$, כאשר השאיפה השניה היא שאיפה בממשיים, שאותה אנחנו כבר מכירים מאינפי.

3. תרגיל: הוכיחו כי במטריקה ה3 אדית הסדרה $(2\cdot 3^n+5)$ מתכנסת ל5 $(2\cdot 3^n+5\to 5)$
פתרון: העזרו בקריטריון השקול להתכנסות. נוכיחו כי

$$d_3(2\cdot 3^n+5,5)\to 0$$

4. תזכורת: l_∞ הוא מרחב הסדרות החסומות מעל הממשיים. כלומר:

$$l_\infty=\{(x_i):\sup|x_i|<\infty\}$$

זהו מרחב נורמי (ולכן מטרי) עם הנורמה:

$$||(x_i)||=\sup|x_i|$$

תרגיל: תהא (x^n) של איברים בl_∞ (כלומר, כל איבר בסדרה הוא בעצמו סדרה אינסופית של מספרים ממשיים) ו x איבר בl_∞ (כלומר, סדרה ממשית חסומה). האם $x^n\to x$ גורר

התכנסות רכיב-רכיב?
במילים: נניח ש$x^n \to x$. נשים לב שכל איבר בסדרה, וכן x בעצמו, הם סדרות אינסופיות.
נסמן בx_i את הרכיב הi של x, ובx_i^n את הרכיב הi של x^n. למשל: אם

$$x^n = (n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, ...)$$

אז $x_1^n = n, x_2^n = \frac{n}{2}$, ובאופן כללי $x_i^n = \frac{n}{i}$.
השאלה היא: אם $x^n \to x$ בl_∞, האם מתקיים שלכל i, $x_i^n \to x_i$ ב$\mathbb{R}$?
האם ההיפך נכון? כלומר, אם אנחנו יודעים שלכל i $x_i^n \to x_i$, האם מתקיים ש$x^n \to x$?
פתרון:
הכיוון הראשון נכון. השתמשו ישירות בהגדרה של התכנסות ומרחק.
הכיוון השני אינו נכון. העזרו בסדרה הבאה: (x^n) כאשר $x^n = e_n$ הוקטור שכולו אפסים, ורק במקום הn יש 1.

5. הגדרה: נאמר שסדרה $\{x_n\}$ היא סדרת קושי, אם לכל $\epsilon > 0$, קיים n_0, כך שלכל $n, m > n_0$ מתקיים: $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

6. תרגיל: יהא (X, d)מ"מ. כל סדרה מתכנסת היא קושי.
פתרון: השתמשו במרחק של איברי הסדרה מהגבול, ובאי-שוויון המשולש.

7. תרגיל: יהא (X, d) מ"מ ותהא (x_n) סדרת קושי שיש לה ת"ס מתכנסת (x_{n_k}) אזי היא מתכנסת.
פתרון: הוכיחו שהסדרה מתכנסת לגבול של תת הסדרה הנתונה.

8. תרגיל: יהא (X, d) מ"מ הוכיחו כי כל סדרת קושי (x_n) חסומה.
פתרון: קיים n_0 כך ש $\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq 1$. נגדיר $r = \max_{i,j \leq n_0} d(x_i, x_j)$.
הוכיחו את הטענה הבאה: $diam(x_n) \leq r + 1$.

שלמות

1. הגדרה: מ"מ נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת.

2. תרגיל: $(C[0,1], d_1)$ אינו שלם. (תיזכורת: $C[0,1]$ הינו מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע $[0,1]$ לממשיים. d_1 היא המטריקה המושרית מהנורמה הבאה:

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

פתרון: ניתן דוגמא לסדרת קושי שאינה מתכנסת. נגדיר $\{f_n\}_{n \geq 2}$ להיות 0 בקטע $[0, \frac{1}{2}]$ אח"כ עולה ל 1 בקטע $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ ואח"כ שווה 1 בקטע $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$. חישבו למה זאת סדרת קושי, ולמה היא אינה מתכנסת. (רמז: אם היא הייתה מתכנסת, מי היה הגבול שלה?)

3. תרגיל: נוכיח כי $(\mathbb{Z}, d_p)$ אינו שלם לכל $p \neq 2$. (הטענה נכונה גם עבור $p = 2$, אבל אז ההוכחה טיפה שונה): נעזר בטענות הבאות:

   (א) טענה: אם $x_n \to x$ בd_p אזי $cx_n \to cx$ בd_p.
   הוכחה: ישירות מהגדרת הגבול והמטריקה.

i. הערה: זה לא נכון במקרה כללי (כלומר, קיימים מרחבים מטריים מעל $\mathbb{R}$, שבהם כפל בסקלר לא שומר על התכנסות). למשל ב $(\mathbb{R},d)$ המוגדרת ע"י $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ כאשר f היא הזהות פרט להחלפה של $2 \rightleftarrows 1$. תנו דוגמא לסדרה מתכנסת $x_n \to x$, וסקלר c, כך ש $cx_n \nrightarrow cx$.

(ב) טענה: $a_n=\sum_{i=0}^{n}p^i=\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ לא מתכנסת אבל היא סדרת קושי (ולכן המרחב לא שלם).

הוכחה: ראשית, בידקו למה היא סדרת קושי.
כעת, אם הסדרה מתכנסת לa, $a_n \to a$ אזי גם $p^{n+1}-1=(p-1)\,a_n \to (p-1)\,a$ לפי הסעיף הקודם. נסמן ב $\bar{t}=\max\{t:\ p^t|\,(-1-a\,(p-1))\}$. (קיים מקסימום, כי מכיוון שהנחנו ש$p\neq 2$, הביטוי שונה מ0). הוכיחו את הטענה הבאה: הסדרה

$$d(p^{n+1}-1,(p-1)\,a)$$

קבועה לבסוף על $\frac{1}{p^{\bar{t}}}$. הסבירו למה זה גורר ש$(p-1)a \nrightarrow p^{n+1}-1$.

קבוצות פתוחות/סגורות

1. הגדרה: קבוצות פתוחות וסגורות ב מ"מ. ב (X,d) קבוצה O היא פתוחה אם $\forall x\in O\exists r>0:\ B(x,r)\subseteq O$. במילים: O פתוחה אם לכל איבר x בO, קיים איזשהו רדיוס r, כך שכל הכדור סביב x ברדיוס r מוכל בO.
בהרצאה הוכחתם שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה (שימו לב שזה לא טריוויאלי!), וכן שחיתוך סופי ואיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
נגיד שקבוצה C היא סגורה אם המשלים שלה פתוח.

2. תרגיל: יהא (X,d) מ"מ אזי כל כדור סגור $B=B[x,r]$ הוא קבוצה סגורה.
הוכחה: צריך להוכיח כי המשלים פתוח. יהא y במשלים כלומר $d(y,x)>r$ נגדיר $r'=d(y,x)-r$ הוכיחו כי $B(y,r')$ מוכל במשלים. סתירה.

3. תרגיל: ב l_∞ נגדיר C קבוצת הסדרות הקבועות אזי C סגורה.
הוכחה: תהא x סדרה לא קבועה. יהיו $a<b$ שני איברים בה. נגדיר $r=\frac{b-a}{2}$ ונראה כי $B(x,r)$ מוכל בC משלים.

4. תרגיל: הא (X,d) מ"מ. כל קבוצה סגורה S היא חיתוך בן מניה של פתוחות $S=\cap_n O_n$.
פתרון: נגדיר $O_n=\cup_{x\in S}B(x,\frac{1}{n})$. זאת קבוצה פתוחה כאיחוד של כדורים פתוחים. ונוכיח כי $S=\cap_n O_n$.

מטריקות שקולות

1. הגדרה: תהי X קבוצה, ונגדיר עליה שתי מטריקות, d וd'. נאמר שd וd' שקולות אם מתקיים התנאי הבא: לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq X$ ואיבר $x\in X$, $x_n \xrightarrow{d} x$ אמ"מ $x_n \xrightarrow{d'} x$

2. דוגמא: יהי (X,d) מרחב מטרי, ויהי $0<\alpha\in\mathbb{R}$. נגדיר על X מטריקה חדשה $\rho(x,y)=:$ $\alpha d(x,y)$. (בידקו שזאת אכן מטריקה). שתי המטריקות הנ"ל שקולות.
הוכחה: נניח ש$x_n \xrightarrow{d} x$. כלומר, $d(x_n,x)\to 0$. לפי כללי התכנסות בממשיים, $\rho(x_n,x)=$ $\alpha d(x_n,x)\to\alpha\cdot 0=0$. כלומר $x_n \xrightarrow{\rho} x$. הכיוון השני מתקבל ע"י החלפת α ב $\frac{1}{\alpha}$.

3. דוגמא נוספת:

(א) נגדיר על $\mathbb{N}$ שתי מטריקות: המטריקה הדיסקרטית, והמטריקה שמושרית מהממשיים. (במטריקה הדיסקרטית המרחק בין כל שני מספרים שונים הוא 1. במטריקה שמושרית מהממשיים, כלומר, האוקלידית, המרחק בין m ל n הוא $|m-n|$). האם המטריקות שקולות?

פתרון: כן. חישבו איך נראות סדרות מתכנסות במטריקות הללו.

4. כעת ניתן דוגמא נגדית: נסתכל על המרחב l_1. זהו המרחב של כל הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט. כלומר,

$$l_1 = \{(x_n) | \Sigma |x_n| < \infty\}$$

על l_1 יש נורמה טבעית שמסומנת $||\cdot||_1$, שמוגדרת ע"י

$$||(x_n)|| = \Sigma |x_n|$$

בנוסף, $l_1 \subseteq l_\infty$, ולכן מוגדרת עליו גם נורמת אינסוף (נקראת גם "נורמת הסופרימום"). שתיהן מגדירות את המטריקות d_1 ו d_∞ בהתאמה.
תרגיל: הראו כי d_1 וd_∞ לא שקולות על l_1 .
פתרון: נסתכל על הסדרה:

$$(1, 0, 0, 0...)$$

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, ...)$$

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0...)$$

ובאופן כללי:

$$x^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$$

אזי, ב d_∞ הסדרה שואפת לוקטור האפס. (ניתן לראות כי $d_\infty(x^n, 0) = \frac{1}{n} \to 0$). אבל ב d_1 לא, מכיוון ש $d_1(x^n, 0) = 1 \nrightarrow 0$.

5. תזכורת: לכל פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חח"ע, ניתן להגדיר מטריקה על $\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

(בידקו שזו אכן מטריקה).

6. תרגיל: אם $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחח"ע. אז ערך מוחלט שקול למטריקה $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$
הוכחה: אם $|x_n - x| \to 0$ אזי $d_f(x_n, x) = |f(x_n) - f(x)| \to 0$ מרציפות. בכיוון השני: אם $|f(x_n) - f(x)| \to 0$ כיוון ש f^{-1} רציפה נקבל כי $|x_n - x| \to 0$.

7. תרגיל: יהיו d, ρ שתי מטריקות שקולות על אותה קבוצה X. נניח שאחת המטריקות שלמה. האם גם השניה שלמה?

פתרון: לא. ניתן דוגמא נגדית.

נסתכל על המטריקה d_f על הממשיים, המוגדרת ע"י הפונקציה $f(x) = e^x$. המטריקה השניה שניקח היא המטריקה האוקלידית. $(\mathbb{R}, |*|)$. שתי המטריקות שקולות לפי התרגיל הקודם. כמו כן, ידוע ש$(\mathbb{R}, |*|)$ שלם. נראה ש$(\mathbb{R}, d_f)$ לא שלם. לצורך כך ניקח את הסדרה: $\left\{\ln \frac{1}{n}\right\}$. הוכיחו כי זוהי סדרת קושי, והסבירו למה אינה מתכנסת.

הפרכה שניה: נקח את הקבוצה $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ונגדרי עליה שתי מטריקות: המטריקה האוקלידית והמטריקה הדיסקרטית. הסבירו למה המטריקות שקולות. מי מהן שלמה? ומי לא?