

פתרון תרגיל בית 3

שאלה 1

חשב את האינטגרליים היעזר בזהויות טריגונומטריות:

א. $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

ב. $\int \sin^2 3x dx$

ג. $\int 7 \cot^2 \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) dx$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$\begin{aligned} \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx &= \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \\ \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx &= \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C \end{aligned}$$

סעיף ב

נשתמש בזהות $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\int \sin^2 3x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 6x}{2} \right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C$$

סעיף ג

נשתמש בזהות $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

$$\int 7 \cot^2 \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \int \frac{7}{\sin^2 \left(4x + \frac{\pi}{2} \right)} dx - \int 7 dx = -\frac{7}{4} \cot \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) - 7x + C$$

שאלה 2

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הצבות טריגונומטריות

$x = a \sin t, x = a \cos t, x = \frac{a}{\sin t}, x = a \tan t$

א. $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

ב. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

ג. $\int \sqrt{x^2+9} dx$

פתרון שאלה 2

סעיף א

נציב $x = \sin t$ ואז $dx = \cos t dt$

$$\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx = \int \sin^4 t \cos^2 t dt$$

נשתמש בזהויות $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$$\sin^4 t = \frac{(1 - \cos 2t)^2}{4}, \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$\sin^4 t \cos^2 t = \frac{(1 - \cos 2t)^2}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{(1 - \cos 2t)(1 - \cos^2 2t)}{8} = \frac{(1 - \cos 2t) \sin^2 2t}{8}$$

$$\int \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int \sin^2 2t dt - \frac{1}{8} \int \sin^2 2t \cos 2t dt$$

נחשב את $\int \sin^2 2t dt$. נשתמש שוב בזהות $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$\int \sin^2 2t dt = \int \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int \cos 4t dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}$$

$$\int \sin^2 2t \cos 2t dt = \frac{\sin^3 2t}{6}$$

$$\int \sin^4 t \cos^2 t dt = \frac{t}{16} - \frac{\sin 4t}{64} - \frac{\sin^3 2t}{48}$$

סה"כ נקבל ש

נשתמש בזהויות: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

$$\sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = 4 \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) = (4 \sin t - 8 \sin^3 t) \sqrt{1 - \sin^2 t} = (4x - 8x^3) \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin^3 2t = 8 \sin^3 t \cos^3 t = 8 \sin^3 t (1 - \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}$$

סה"כ נקבל

$$\int x^4 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\arcsin x}{16} - \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{16} + \frac{x^3 \sqrt{1 - x^2}}{8} - \frac{x^3(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}{6} + C =$$

$$\frac{\arcsin x}{16} + x\sqrt{1 - x^2} \left[-\frac{1}{16} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{6} \right] + C$$

סעיף ב

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$$

נציב $x = \frac{\sin t}{2}$ ונקבל $dx = \frac{\cos t}{2} dt$

$$\sqrt{1 - 4x^2} = \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{\sin^2 t}{4}} = |\cos t|$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx = \int \frac{\sin^2 t}{4 \cos t} \cdot \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{8} \int \sin^2 t dt = \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{16} - \frac{\sin 2t}{32} =$$

$$= \frac{t}{16} - \frac{\sin t \cos t}{16} = \frac{t - \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}}{16} = \frac{\arcsin 2x - 2x \sqrt{1 - 4x^2}}{16} + c$$

סעיף ג

נציב $x = 3 \tan t$ ואז $dx = \frac{3dt}{\cos^2 t}$

$$\int \sqrt{x^2 + 9} dx = \int \frac{3\sqrt{9 \tan^2 t + 9}}{\cos^2 t} dt = 3 \int \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = 9 \int \frac{1}{\cos^3 t} dt$$

נשאר לחשב את $\int \frac{1}{\cos^3 t} dt$. נציב $u = \sin t$ ואז $du = \cos t dt$.

$$\int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \int \frac{\cos t}{\cos^4 t} dt = \int \frac{\cos t}{(1 - \sin^2 t)^2} dt = \int \frac{1}{(1 - u^2)^2} du = \int \frac{1}{(1 + u)^2(1 - u)^2} du =$$

$$\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{(1 + u)^2} + \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{(1 - u)^2} \right) du = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| - \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right) = \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + \frac{2u}{1 - u^2} \right)$$

נציב חזרה $u = \sin t$ ונקבל $\frac{9 \sin t}{2 \cos^2 t} + \frac{9}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right|$

נשתמש בזהות $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

נשים לב ש $\frac{\sin t}{\cos^2 t} = \tan t \cdot \frac{1}{\cos t} = \tan t \cdot \sqrt{\tan^2 t + 1}$

$$\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \cdot \frac{1 + \sin t}{1 + \sin t} = \frac{1 + 2 \sin t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} + 2 \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$$

מהזהויות שרשמתי לפני כן נקבל ש

$$\frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} = \tan^2 t + 1 + 2 \tan t \sqrt{\tan^2 t + 1} + \tan^2 t = 2 \tan^2 t + 2 \tan t \sqrt{\tan^2 t + 1} + 1 =$$

$$\left(\tan t + \sqrt{\tan^2 t + 1} \right)^2$$

$$\frac{9}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + \frac{9 \sin t}{2 \cos^2 t} = \frac{9}{4} \ln \left(\tan t + \sqrt{\tan^2 t + 1} \right)^2 + \frac{9}{2} \tan t \sqrt{\tan^2 t + 1} =$$

$$\frac{9}{2} \ln \left(\tan t + \sqrt{\tan^2 t + 1} \right) + \frac{9}{2} \tan t \sqrt{\tan^2 t + 1}$$

$$\frac{9}{2} \ln \left(\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9} + 1} \right) + \frac{9}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{9} + 1} = \frac{9}{2} \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{3} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 9}$$

$$= \frac{9}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 9} - \frac{9}{2} \ln 3$$

$$\frac{9}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 9} + c$$

הפתרון הוא עד כדי קבוע ולכן נקבל

שאלה 3

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הצבה אוניברסלית:

א. $\int \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$

ב. $\int \frac{1 - 3 \sin 2x}{1 + \cos 2x} dx$

פתרון שאלה 3

סעיף א

נציב $t = \tan \frac{x}{2}$ ואז $\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$, $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

$$\int \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{t^2+1} dt = \int \frac{2dt}{-\sqrt{3}t^2 + 2t + \sqrt{3}} = \int \frac{2dt}{(-\sqrt{3}t-1)(t-\sqrt{3})}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dt}{-\sqrt{3}t-1} = -\frac{1}{2} \ln|t-\sqrt{3}| + \frac{1}{2} \ln|-\sqrt{3}t-1| = -\frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} - \sqrt{3} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| -\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - 1 \right|$$

סעיף ב

נציב $t = \operatorname{tg} x$ ואז $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x} dx = \int \left(1 - \frac{6t}{1+t^2}\right) : \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2 - 6t + 1}{1+t^2} : \left(\frac{2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2 - 6t + 1}{2+2t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{6t}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - 3 \cdot \frac{2t}{t^2+1}\right) dt = \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \ln(t^2+1) + c = \frac{\operatorname{tg} x}{2} - \frac{3}{2} \ln((\operatorname{tg} x)^2 + 1) + c$$

שאלה 4

פתור באמצעות נוסחת נסיגה את האינטגרל הבא:

$$\int x^n \sin x dx$$

פתרון

נסמן $I_n = \int x^n \sin x dx$. נחשב תחילה את I_1 .

$$I_1 = \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$$

נחשב את $I_n = \int x^n \sin x dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$I_n = \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx = -x^n \cos x + n(x^{n-1} \sin x) - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x dx =$$

$$= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

מכיוון שקיבלנו את I_n באמצעות I_{n-2} יש לחשב בנוסף ל I_1 גם את I_2 .

$$I_2 = \int x^2 \sin x dx$$

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$u' = 2x \Leftarrow u = x^2$$

נסמן:

$$v = -\cos x \Leftarrow v' = \sin x$$

$$I_2 = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

נקבל את התשובה

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

$$I_1 = -x \cos x + \sin x$$

$$I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$