בוחן בדידה 1 למהנדסים, 116־83, תש"ף

ב' טבת 30/12/2019

מרצה: עדי בן צבי.

מתרגלים: אריאל ויצמן, עומר נטר, גלעד פורת קורן.

- ענו על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה ועשרים דקות.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי ־ מומלץ להתחיל עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. נגדיר קשר לוגי $*$ ע"י טבלת האמת הבאה:

A	B	$A * B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

הגשימו את **אחד** הקשרים $\vee, \to$ בעזרת הקשר $*$. (20 נקודות)

פתרון:

הפתרון כאן הוא $A \to B \equiv A * B$. כאן המקום לציין שטבלת האמת הייתה אמורה להיות:

A	B	$A * B$
F	F	T
F	T	F
T	F	T
T	T	T

ואז היה צריך לשים לב לכך ש $A \to B \equiv B * A$...

2. יהי $P(x,y)$ פרדיקט מעל השלמים (כלומר, $x, y \in \mathbb{Z}$). הוכיחו או הפריכו:

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \exists y P(y,x) \Rightarrow \forall x \exists y \left(P(x,y) \wedge P(y,x)\right)$$

(20 נקודות)

פתרון:

הפרכה: ניקח את הפרדיקט $P(x,y) = x > y$, אכן לכל $x \in \mathbb{Z}$ קיים $y \in \mathbb{Z}$ כך ש $x > y$ (ניקח $y = x - 1$), וכמו כן לכל $x \in \mathbb{Z}$ קיים $y \in \mathbb{Z}$ כך ש $y > x$ (ניקח $y = x + 1$). אבל לא לכל x יש y כך ש־ $x > y \wedge y > x$, כי למשל עבור 0 אין y מתאים (האמת היא שאין אף אחד כזה, אבל כאן מספיק להראות שיש 1 לא כזה...).

3. תהיינה A, B קבוצות. הוכיחו: $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) \iff A \subseteq B \vee B \subseteq A$. (20 נקודות)

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$, ונניח בשלילה $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$ (שימו לב לדה־מורגן). זאת אומרת שיש $a \in A \setminus B$ וכן יש $b \in B \setminus A$. שימו לב שהקבוצה $\{a, b\}$ מקיימת:

$$\{a, b\} \subseteq A \cup B \Rightarrow \{a, b\} \in P(A \subseteq B)$$

$$\{a, b\} \not\subseteq A \Rightarrow \{a, b\} \notin P(A)$$

$$\{a,b\} \not\subseteq B \Rightarrow \{a,b\} \notin P(B)$$

ובסה"כ נקבל $P(A\cup B) \neq P(A)\cup P(B)$ בסתירה.

$\Rightarrow$: אם $A\subseteq B$, אז $P(A)\subseteq P(B)$ ונקבל: $P(A\cup B)=P(B)=P(A)\cup P(B)$. באותו אופן אם $B\subseteq A$.

4. נסמן את קבוצת הראשוניים ב־ $\mathbb{P}=\{p\in\mathbb{N} : p \text{ is prime}\}$. לכל $2\le n\in\mathbb{N}$ נגדיר את הקבוצה $A_n=\{p\in\mathbb{P} : p|n\}$, כלומר, אוסף המחלקים הראשוניים של n.

(א) חשבו את $\bigcup\limits_{2\le n\in\mathbb{N}} A_n$. הוכיחו את תשובתכם (כלומר, הוכיחו את השיוויון בין האיחוד הנתון לבין תשובתכם). (20 נקודות)

(ב) לכל $2\le n\in\mathbb{N}$ נסמן $B_n=\mathbb{P}\setminus A_n$. חשבו את $\bigcap\limits_{2\le n\in\mathbb{N}} B_n$. הוכיחו את תשובתכם (כלומר, הוכיחו את השיוויון בין החיתוך הנתון לבין תשובתכם). (20 נקודות)

<u>פתרון:</u>

א. טענה: $\bigcup\limits_{2\le n\in\mathbb{N}} A_n=\mathbb{P}$. הוכחה:

$\subseteq$: ברור, כי לכל $n\ge 2$ מתקיים $A_n\subseteq\mathbb{P}$, אז גם האיחוד.

$\supseteq$: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p|p$ ולכן $p\in A_p$ ולכן (מספיק להיות בקבוצה אחת כדי להיות באיחוד) $p\in \bigcup\limits_{2\le n\in\mathbb{N}} A_n$.

ב. טענה: $\bigcap\limits_{2\le n\in\mathbb{N}} B_n=\varnothing$. הוכחה: נגדיר את הקבוצה האוניברסלית לדיון להיות $U=\mathbb{P}$. נקבל $B_n=A_n^c$. לכן, לפי דה־מורגן הכללי:

$$\bigcap_{2\le n\in\mathbb{N}} B_n=\bigcap_{2\le n\in\mathbb{N}} A_n^c=\left(\bigcup_{2\le n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c=\mathbb{P}^c=U^c=\varnothing$$