תרגול כיתה 2 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

מרחבי הסתברות ומאורעות, הסתברות מותנה

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

תרגיל 1

מטילים מטבעות הוגנים בזה אחר זה על הרצפה עד להופעת עץ ראשון ואז בוחרים מטבע באקראי מהמטבעות שהוטלו. מה הסיכוי שנבחר עץ?

פתרון:

נסמן ב A_n את המאורע בו עץ הופיע בהטלה ה n-ית. כעת, $P(A_n)=\frac{1}{2^n}$. נסמן ב B את המאורע שבו נבחר עץ. אזי $P(B\mid A_n)=\frac{1}{n}$. לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B\mid A_n)\cdot P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\ln(2)$$

הערה: סכום הטור מתקבל למשל מהצבת $x=1/2$ בפיתוח טיילור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln\left(1-x\right)$

תרגיל 2

הסיכוי שבן אוהב ברוקולי הוא 7%. הסיכוי שבת אוהבת ברוקולי הוא 31%. מבין הקונים בחנות 70% בנות. מה הסיכוי שהקונה הבא אוהב ברוקולי?

פתרון:

נסמן ב A את המאורע בו הקונה הבא הוא בת. כעת, $P(A)=0.7$. נסמן ב B את המאורע בו הקונה אוהב ברוקולי. אזי $P(B\mid A)=0.31$ ו $P(B\mid A^c)=0.07$.

לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\mid A)\cdot P(A)+P(B\mid A^c)\cdot P(A^c)\\&=0.31\cdot 0.7+0.07\cdot 0.3=0.238\end{aligned}$$

<u>תרגיל 3</u>

אחוז החולים באוכלוסיה במחלה X הוא 1%. ישנה בדיקה לאבחון המחלה, שסיכוי הגילוי שלה של המחלה הוא 90% (כלומר אם אתה חולה אז יש 90% סיכוי שהיא תאמר לך זאת ואם אתה בריא אז יש 90% סיכוי שתאמר לך זאת). מישהו נבדק ונמצא חולה. מה הסיכוי שהוא אכן חולה?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב A את המאורע שבו מישהו חולה. אזי $P(A)=0.01$. נסמן ב B את המאורע בו המכונה אומרת לך שאתה חולה. $P(B|A)=0.9$ ו $P(B|A^c)=0.1$. לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B)=P(B|A)\cdot P(A)+P(B|A^c)\cdot P(A^c) = 0.9\cdot 0.01+0.1\cdot 0.99=0.108.$$

לפי חוק בייס $P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}=\frac{0.9\cdot 0.01}{0.108}=8\frac{1}{3}\%$.

<u>תרגיל 4</u>

מבין הפונים לדוקטורט, 45% מהבנים ו 37% מהבנות התקבלו. מבין הפונים למדעי הטבע, 57% מהבנות התקבלו ו 50% מהבנים, ומבין הפונים למדעי הרוח, 33% מהבנות ו-30% מהבנים התקבלו. באונ' שתי פקולטות בלבד, מדעי הטבע ומדעי הרוח.

א). מהי התפלגות הבנים הפונים לדוקטורט בין הפקולטות?

ב). מהי התפלגות הבנות?

<u>פתרון:</u> (אפשר תרשים עץ לעזר)

נסמן ב B את קבוצת הבנים, G את קבוצת הבנות, E את הפונים למדעי הטבע, H את הפונים למדי הרוח ו A את קבוצת המתקבלים.

א). התפלגות הבנים:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A|B)=P(A|B\cap E)P(B\cap E|B)+P(A|B\cap H)P(B\cap H|B)$$

כעת, $P(A|B)=0.45$, $P(A|B\cap H)=0.30$, $P(A|B\cap E)=0.5$ ו

ולכן $P(B\cap H|B)=1-P(B\cap E|B)$

$$0.45=0.5P(B\cap E|B)+0.3(1-P(B\cap E|B))=0.2P(B\cap E|B)+0.3$$

כלומר $0.15=0.2P(B\cap E|B)$, משמע $P(B\cap E|B)=\frac{3}{4}$ ו $P(B\cap H|B)=\frac{1}{4}$.

ב). התפלגות הבנות:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A|G)=P(A|G\cap E)P(G\cap E|G)+P(A|G\cap H)P(G\cap H|G)$$

כעת, $P(A|G)=0.37$, $P(A|G\cap H)=0.33$, $P(A|G\cap E)=0.57$ ו

ולכן $P(G\cap H|B)=1-P(G\cap E|G)$

$$0.37=0.57P(G\cap E|G)+0.33(1-P(G\cap E|G))=0.24P(G\cap E|G)+0.33$$

כלומר $0.04=0.24P(G\cap E|G)$,

משמע $P(G\cap E|G)=\frac{1}{6}$ ו $P(G\cap H|G)=\frac{5}{6}$.

<u>תרגיל 5</u>

בבית ספר מסוים, לפחות 90% מהתלמידים יודעים גם אנגלית וגם גרמנית, ולפחות 90% מהתלמידים יודעים גם אנגלית וגם צרפתית. הוכח כי מבין אלו שיודעים גם גרמנית וגם צרפתית, לפחות 90% יודעים אנגלית. תן חסם מלרע לאחוז התלמידים שיודעים אנגלית, צרפתית וגרמנית. [קשה]

<u>פתרון:</u>

נסמן ב E את המאורע בו תלמיד יודע אנגלית, ב D את המאורע בו תלמיד יודע גרמנית וב F את המאורע בו תלמיד יודע צרפתית. אם כך $P(E\cap D)\ge 0.9$ וגם

$P(E\cap F)\geq 0.9$. אם $P(E\cap D\cap F)\geq 0.9$ אז זה מובן מאילו, משום ש $P(E\cap D\cap F\mid D\cap F)\geq P(E\cap D\cap F)$.

נסמן אם כן $P(E\cap D\cap F)=0.9-a$ לאיזשהו $0\leq a\leq 0.9$. אם כך $P((E\cap D\cap F)^c)=P(E^c\cup D^c\cup F^c)=0.1+a$. כעת

$$0.9\leq P(E\cap D)=P(E\cap D\cap F)+P(E\cap D\cap F^c)$$
$$=0.9-a+P(E\cap D\cap F^c)$$

כלומר $P(E\cap D\cap F^c)\geq a$. באופן דומה ניתן להראות כי $P(E\cap F\cap D^c)\geq a$.

כעת, הקבוצות $E\cap F\cap D^c$, $E\cap D\cap F^c$ ו $E^c\cap D\cap F$ הן זרות בזוגות והן תת-קבוצות של $E^c\cup D^c\cup F^c$, ולכן

$$0.1+a=P((E\cap D\cap F)^c)\geq P(E\cap F\cap D^c)+P(E\cap D\cap F^c)$$
$$+P(E^c\cap D\cap F)=2a+P(E^c\cap D\cap F),$$

דהיינו $P(E^c\cap D\cap F)\leq 0.1-a$ ולכן $a\leq 0.1$.

לסיום

$$P(E\cap D\cap F\mid D\cap F)=\frac{P(E\cap D\cap F)}{P(D\cap F)}=\frac{P(E\cap D\cap F)}{P(E\cap D\cap F)+P(E^c\cap D\cap F)}$$
$$=\frac{0.9-a}{0.9-a+0.1-a}=\frac{0.9-a}{1-2a}=0.9+\frac{0.8a}{1-2a}\geq 0.9$$

<u>תרגיל 6</u>

נסמן $\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\in\{0,1\}^3 : x_1+x_2+x_3\equiv 0 \pmod 2\}$ ויהי (Ω,P) מרחב הסתברות אחיד. נסמן $A_n=\{(x_1,x_2,x_3)\in\Omega : x_n=0\}$. הוכח כי לכל $n\neq m$, A_n ו A_m בלתי-תלויים. הראה כי $P(A_1\cap A_2\cap A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ [כלומר ששלושת המאורעות הללו אינם בלתי-תלויים במשותף]

<u>פתרון:</u>

$|\Omega| = 4$. לכל $1 \le n \le 3$, $A_n = \{(0,0,0),(a_1,a_2,a_3)\}$ כאשר $a_k = \begin{cases} 0 (k = n) \\ 1 (k \ne n) \end{cases}$,

כלומר $|A_n| = 2$ ולכן $P(A_n) = \frac{1}{2}$. לכל $n \ne m$, $A_m \cap A_n = \{(0,0,0)\}$ ולכן

$P(A_m \cap A_n) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_m)P(A_n)$, ולכן A_n ו A_m בלתי-תלויים. אולם

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(0,0,0)\}$ משמע

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \ne \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.