תרגיל לעבודה עצמית 5

שאלה 1

פתור את האינטגרלים הבאים באמצעות שימוש באינטגרלים מיידים

א. $\int \sin x \cos 5x dx$.

ב. $\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx$.

פתרון

א. נשתמש בזהויות $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

$$\int \sin x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin 6x + \sin(-4x)\right)dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin 6x - \sin(4x)\right)dx = -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x + c$$

ב. $\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx = \int \left(1+2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx = x + \frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + c$.

שאלה 2

חשב את האינטגרלים הבאים בעזרת שיטת ההצבה:

א. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$.

ב. $\int x^3\sqrt{x^4+1}dx$.

פתרון

א. נציב $t = \ln x \Leftarrow dt = \frac{dx}{x}$. $\int \sin t dt = -\cos t = -\cos(\ln x)$.

ב. נציב $t = x^4+1 \Leftarrow dt = 4x^3dx$. $\int x^3\sqrt{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int\sqrt{t}dt = \frac{2t\sqrt{t}}{6} = \frac{2(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}{6}$.

שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים בעזת שיטת אינטגרציה בחלקים:

א. $\int x^3 \ln x dx$.

ב. $\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}} dx$

פתרון

א. נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = \ln x \quad v = \frac{x^4}{4}$$
$$u' = \frac{1}{x} \quad v' = x^3$$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^4\ln x}{4} - \int\frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4\ln x}{4} - \frac{x^4}{16}$$.

ב. נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$v = 2(x-1)^{0.5} \quad u = 2x$$
$$v' = (x-1)^{-0.5} \quad u' = 2$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x-1}}dx = 4x\sqrt{x-1} - \int 4(x-1)^{\frac{1}{2}}dx = 4x\sqrt{x-1} - \frac{8(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$$.

שאלה 4

פתור באמצעות נוסחת נסיגה את האינטגרל הבא:

$$\int x^n \sin x dx$$

פתרון

נסמן $I_n = \int x^n \sin x dx$. נחשב תחילה את I_1.

$$I_1 = \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$$

נחשב את $I_n = \int x^n \sin x dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$I_n = \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x dx = -x^n \cos x + n\left(x^{n-1} \sin x\right) - n(n-1)\int x^{n-2} \sin x dx =$$
$$= -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

מכיוון שקיבלנו את I_n באמצעות I_{n-2} יש לחשב בנוסף ל I_1 גם את I_2.

$I_2 = \int x^2 \sin x dx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

נסמן:
$$u' = 2x \Leftarrow u = x^2$$
$$v = -\cos x \Leftarrow v' = \sin x$$

$$I_2 = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x$$

נקבל את התשובה

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$$
$$I_1 = -x \cos x + \sin x$$
$$I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x$$

שאלה 5

פתור את האינטגרל הבא בעזרת חלוקת פולינומים:

$$\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x} dx$$

פתרון

$$\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x} dx = \int \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+x} = \int \left(\frac{x^3+x}{x^3+x} + \frac{6x^2+11x+8}{x^3+x}\right)dx =$$
$$= \int \left(1 + \frac{2\left(3x^2+1\right)}{x^3+x} + \frac{11x+6}{x^3+x}\right)dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int 1 dx = x, \int \frac{2\left(3x^2+1\right)}{x^3+x}dx = 2\ln\left(x^3+x\right)$$

נשאר לחשב $\int \frac{11x+6}{x\left(x^2+1\right)}dx = \int\left(\frac{11x}{x\left(x^2+1\right)}+\frac{6}{x\left(x^2+1\right)}\right)dx$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int \frac{11}{x^2+1}dx = 11\arctan x$$

$$\int \frac{6}{x\left(x^2+1\right)}dx = 6\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = 6\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)$$

סה"כ נקבל שהפתרון הוא

$$x+2\ln\left|x^3+x\right|+11\arctan x+6\ln|x|-3\ln\left(x^2+1\right)$$