תרגיל 1(פונקציה לא רציפה שהנגזרות החלקיות שלה קיימות)

נתון $f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$

(א) בדוק האם f רציפה.

(ב) מצא נגזרות חלקיות באם קיימות.

פתרון

(א) ברור f לא רציפה כי. נבחר בהצבה $y=kx$ ונקבל

$$\lim_{x\to0}\frac{x\left(kx\right)}{x^{2}+k^{2}x^{2}}=\frac{k}{1+k^{2}}$$

הקבול אינו קיים $\Leftarrow$ לא רציפה.

(ב) נגזור בסביבת הנקודה $\left(0,0\right)$ לפי ההגדרה.

$$f_{x}'\left(0,0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\cdot0}{h^{2}+0^{2}}-0}{h}=0$$

בדיוק אותו דבר

מסקנה

לא נוכל להסיק דבר על הנגזרות החלקיות אם f אינה רציפה.

תזכורת

דיפרנציאביליות $f\left(\vec{p}+\vec{h}\right)-f\left(\vec{p}\right)=L\left(\vec{h}\right)+o\left(\|\vec{h}\|\right)$. ראינו שמספיק להסתכל על הגבול

$$\lim_{\vec{h}\to0}\frac{f\left(\vec{p}+\vec{h}\right)-f\left(\vec{p}\right)-L\left(\vec{h}\right)}{\|\vec{h}\|}=0$$

דיפרנציאבילית.

דוגמה 2

קבע האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות

(א) $f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$

פתרון

תזכורת: אם f דיפרנציאבילית אז היא בהכרח רציפה

$$0 \le \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$$

במקרה שלנו f רציפה. כדי לבנות את $L\left(\vec{h}\right)$ נמצא נגזרות חלקיות. הנקודה היחידה שמעניינת אותנו היא $(0,0)$. נשים לב ש$f(x,0)=0 \Leftarrow f'_x(0,0)=0$. באופן דומה נקבל $f'_y(0,0)=0$

נבנה את $df(0,0)$:

$$df_{(0,0)}\left(\begin{pmatrix} h \\ j \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 0 \cdot h + 0 \cdot k = 0$$

נשאר לחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-L(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

ברור שהגבול הוא לא ייקים. לדוגמה ע"י הצבה $k=mh$.(זוהי דוגמה לפונקציה רציפה שאינה דיפרנציאבילית).

ב) נתונה $$f(x) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(I) קבע האם f רציפה

תשובה קל לראות שרציפה לכל (x,y) ע"י הרכבה של פונקציות רציפות ובנקודה $(0,0)$ ע"י הצבה $t=x^2+y^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to0} t\sin\frac{1}{\sqrt{t}} = 0$$

(II) מצא נגזרות חלקיות לפונקציה בכל נקודה.

תשובה פרט לנקודה $(0,0)$ נגזור לפי נוסחאות:

$$f'_x = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(x^2+y^2\right)$$

$$f'_y = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

נשאר לחשב את הנגזרת בנקודת $(0,0)$ לפי ההגדרה.

$$f'_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{\sqrt{t^2}}-0}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{|t|} = 0$$

באופן דומה נקבל $f'_y(0,0)=0$.

<u>מסקנה</u>: הנגזרות החלקיות קיימות.

(III) קבע האם הנגזרות החלקיות רציפות. נבדוק את הגבול של f'_x כאשר x וy שואפים לאפס:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נשאר לבדוק את הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. נבחר $t = x^2+y^2$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\frac{1}{\sqrt{t}}$$

נבחר שתי סדרות ששואפות לאפס:

$$x_n = \frac{1}{(\pi+\pi n)^2}$$

$$y_n \frac{1}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)+\pi n\right)^2}$$

נקבל פעם אחת גבול ∞ ופעם שנייה גבול אפס! ז"א הנגזרות החלקיות קיימות אך לא רציפות.

שימו דב

ניתן היה להראות שהגבול לא קיים בדרך הבאה:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נחפש מסלול שאיפה שלא נותן לנו גבול אפס:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}$$

שוב נבחר סדרות בקלות לפי היינה.

(IV) ראינו בסעיף (III) שלf קיימות נגזרות חלקיות אך לא רציפות. קבע האם f דיפרנציאבילית. אם כן, הראה זאת מפורשות.

פתרון יתכן מקרה כי הנגזרות החלקיות קיימות אך לא רציפות ובכל זאת f דיפרנציאבילית. זאת אומרת חייבים לבדוק דיפרנציאביליות! נבדוק את הדיפרנציאל:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f\left(h,k\right)-f\left(0,0\right)-df_{(0,0)}\left(\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(h^2+k^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}-0-\left(f'_x\left(0,0\right)h+f'_y\left(0,0\right)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(h^2+k^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0$$

ע"כ הפונקציה הנ"ל דיפרנציאבילית.

לסיכום

- אם הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות $\Leftarrow$ דיפרנציאביליות.
- אם f לא רציפה $\Leftarrow$ לא דיפרנציאבילי
- אם הנגזרות החלקיות קיימות אך לא רציפות לא ניתן להסיק דבר.

מסקנה

כל פולינום דיפרנציאבילי. למעשה כל הפונקציות האלמנטריות דיפרנציאביליות.

תרגיל

נתון $f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}\sin x\\xy\\\cos y\end{pmatrix}$ כאשר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$.

(א) חשב את $d_af\left(\vec{h}\right)$ כאשר $a=\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ ו$\vec{h}\in\mathbb{R}^2$.

(ב) בהסתמך על סעיף (א) חשב את $f\left(\pi-0.01,\frac{\pi}{2}+0.02\right)$.

פתרון

(א) נמצא נגזרות חלקיות לוקטור:

$$f'_x(x,y)=\begin{pmatrix}\cos x\\ y\\ \end{pmatrix}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{pmatrix}0\\ x\\ -\sin y\end{pmatrix}$$

נסמן $\vec{h}=(h_1,h_2)$.

$$d_af\left(\vec{h}\right)=f'_x(a)\cdot h_1+f'_y(a)\cdot h_2=f'_x\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\cdot h_1+f'_y\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)\cdot h_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{\pi}{2}\\ 0\end{pmatrix}h_1+\begin{pmatrix}0\\ \pi\\ -1\end{pmatrix}h_2=\begin{pmatrix}-h_1+0\\ \frac{\pi}{2}h_1+\pi h_2\\ 0-h_1\end{pmatrix}$$

(ב) נשתמש בהגדרת הדיפרנציאל (ביקשו קירוב לביטוי)

$$f(a+h)=f(a)-df_a(h)+o(\|h\|)$$

ביקשו $f\left(\pi-0.01,\frac{\pi}{2}+0.02\right)$. נבחר את h להיות $h=(h_1,h_2)=(-0.01,0.02)$

$$f\left(\pi-0.01,\frac{\pi}{2}+0.02\right)=f\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)+d_{\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)}f(-0.01,0.02)+o\left(\sqrt{(0.01)^2+(0.02)^2}\right)$$

כדי לחשב את צד שמאל ניתן הערכה לצד ימין.

$$f\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)+df_{\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)}(-0.01,0.02)=\begin{pmatrix}\sin\pi\\ \frac{\pi^2}{2}\\ \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.01\\ \frac{\pi}{2}(-0.01)+\pi(0.02)\\ -0.02\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל

$$f\left(\pi-0.01,\frac{\pi}{2}+0.02\right)\approx\begin{pmatrix}0.01\\ \frac{\pi^2}{2}-0.01\frac{\pi}{2}+\pi(0.02)\\ -0.02\end{pmatrix}$$

זהו הקירוב הדרוש!!

נגזרת לפי וקטור ולפי כיוון

הגדרה

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, ותהי $f : \Omega \to \mathbb{R}$. תהי $p \in \text{int}\Omega$. בנוסף יהי $0 \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$. נגדיר את הנגזרת של f בנקודה p לפי הוקטור h להיות

$$\partial_h f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t \cdot h) - f(p)}{t}$$

הגדרה

אם h וקטור מנורמל ז"א $\|h\| = 1$, אז הנגזרת $\partial_h f$ של f לפי ווקטור h נקראת נגזרת כיוונית(נגזרת בכיוון h)

דוגמה

מצא את הנגזרת של $f(x,y) = xy^2$ לפי הכיוון של הוקטור $h = (1,1)$

פתרון

ביקשו נגזרת כיוונית. נתון וקטור h ננרמל אותו:

$$h' = \frac{h}{\|h\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

נחשב $\partial_h f(x,y)$:

$$\partial_h f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + th') - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + \frac{t}{\sqrt{2}}, y + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(x + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(y + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - xy^2}{t} = \frac{\left(x + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(y^2 + 2y\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}\right) - xy^2}{t}$$

$$= \sqrt{2} \cdot xy + \frac{1}{\sqrt{2}} y^2$$