בס"ד

תרגול מס' 9 במבנים אלגבריים 1

הצמדות ותמורות

<u>הגדרה</u>: שני איברים בחבורה: $x,y\in G$ נקראים **צמודים** אם: $\exists\gamma\in G:\quad \gamma x\gamma^{-1}=y$.

<u>הערה</u>: יחס ההצמדה הוא יחס שקילות, ומחלקות השקילות נקראות **מחלקות צמידות**.

<u>תרגיל</u>: תהא חבורה G ויהי $g\in G$.

1. הוכח כי הסדר של כל איבר צמוד של g שווה לסדר של g.
2. נניח ש: $o(g)=d$ (סופי). הוכח:

   g הוא האיבר היחיד ב- G מסדר d $\Leftarrow$ g מתחלף עם כל איבר ב- G.

<u>פתרון</u>:

1. הוכחתם בתרגיל באופן כללי כי בכל חבורה מתקיים: $\forall a,b\in G:\ o(ab)=o(ba)$. לכן אם נסמן: $o(hgh^{-1})=o(h^{-1}hg)=o(g)\quad\Rightarrow\quad a=hg,\ b=h^{-1}\quad \forall h\in G:$ (ההיפך לא נכון, כלומר יתכנו שני איברים מאותו הסדר אבל לא צמודים ! לדוגמה: ב- $U_{10}=\{1,3,7,9\}$, $o(3)=o(7)=4$ אבל הם אינם צמודים שכן הם שונים בחבורה אבלית).
2. נתון כי g הוא האיבר היחיד בחבורה מסדר d לכן עפ"י 1 ל- g אין איברים צמודים שונים ממנו, כלומר: $\forall h\in G:\ hgh^{-1}=g\quad\Rightarrow\quad hg=gh$ ומכאן ש- g מתחלף עם כל איבר בחבורה.

<u>תרגיל</u>:

1. תהא G חבורה אבלית. הוכח שבכל מחלקת צמידות יש רק איבר אחד.
2. כמה מחלקות צמידות יש בחבורה מסדר ראשוני p ?

<u>פתרון:</u>

1. נניח $a,b \in G$ שני איברים צמודים. אזי: $\exists c \in G : a = cbc^{-1} = cc^{-1}b = b$.
2. G ציקלית לכן אבלית וכל איבר בה הוא מחלקת צמידות ובסה"כ ישנן p מחלקות צמידות.

<u>הגדרה:</u> תהא σ תמורה ב- S_n. נפרק אותה למכפלה של עגילים זרים:

$$\sigma = \left(a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1r_1}\right)\left(a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2r_2}\right)\cdots\left(a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kr_k}\right)$$ כך ש: $r_1 \geq r_2 \geq .... \geq r_k$ ו- $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

הסדרה: $\left(r_1, r_2, ..., r_k\right)$ נקראת ה***טיפוס (type)*** של σ.

<u>משפט:</u> $\sigma, \tau \in S_n$ הן צמודות אמ"מ הן מאותו הטיפוס.

<u>תרגיל:</u> יהא: $\alpha = \left(1\ 3\ 7\right),\ \beta = \left(2\ 3\ 5\right)$ מצא γ כך ש: $\gamma\alpha = \beta\gamma$.

<u>פתרון:</u> α, β הן מאותו טיפוס לכן צמודות. נמצא מצמיד עפ"י: $\gamma = \begin{pmatrix} 1\ 3\ 7 \\ 2\ 3\ 5 \end{pmatrix} = (1\ 2)(5\ 7)$ (בדוק !).

<u>תרגיל:</u> מצא כמה מחלקות צמידות קיימות ב- S_5 וב- A_4.

<u>פתרון:</u> מס' מחלקת הצמידות ב- S_5 הוא כמספר הטיפוסים שם. ישנם בסה"כ 7 טיפוסים:

$(1\,2\,3\,4\,5)$, $(1\,2\,3\,4)(5)$, $(1\,2\,3)(4\,5)$, $(1\,2\,3)(4)(5)$, $(1\,2)(3\,4)(5)$, $(1\,2)(3)(4)(5)$ ו- $(1)(2)(3)(4)(5)$.

ב- A_4 רק 3 מתוך 5 המחלקות הנ"ל רלוונטיות אבל מחלקת השלישיות מתפצלת לשתיים. לכן בסה"כ 4.

<u>דוגמה:</u> ת"ח קליין (איזומטריה של מלבן שאינו ריבוע): $V_4 \leq A_4$ מכילה את כל התמורות מהטיפוס $\left(2,2\right)$ ב- A_4. הצמדה לא משנה טיפוס. מכאן שבהכרח: $\forall g \in A_4, v \in V_4 : gvg^{-1} \in V_4$ או במילים אחרות: $V_4 \lhd A_4$.

טענה: $\forall n:\ S_n = \left\langle (1,2),\ (1,2,3,.....,n) \right\rangle$.

הוכחה:

כל תמורה ניתנת לכתיבה כמכפלה של חילופים. כמו כן: $\forall (i,j) = (1,i)(1,j)(1,i)$.

לכן: $\forall n:\ S_n = \left\langle \left\{ (1,i) \mid i \in \{1,2,....,n\} \right\} \right\rangle$.

נסמן: $\tau = (1,2,....,n)$, $\sigma = (1,2)$. צ"ל: $S_n = \left\langle \tau, \sigma \right\rangle$.

נשים לב כי: $\tau\sigma\tau^{-1} = \left(2\ 3\right),\quad \tau^2\sigma\tau^{-2} = \tau(2\ 3)\tau^{-1} = \left(3\ 4\right),\quad \ldots\quad \tau^{n-2}\sigma\tau^{n} = \left(n-1\ n\right)$

כמו כן: $(1\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$, $\left(1 4\right) = \left(1 3\right)\left(3 4\right)\left(1 3\right)$

וכן הלאה עד: $(1\ n) = (1\ n-1)(n-1\ n)(1\ n-1)$.

כלומר הצלחנו לייצר את כל התמורות מהצורה $(1\ i)$ ע"י $\sigma,\ \tau$ ומכאן ש: $S_n = \left\langle \tau, \sigma \right\rangle$. □