מבנים דיסקרטיים – תרגיל 6

כל סעיף שווה 10 נקודות

שאלה 1

א. יהי $(R,+,\cdot)$ חוג ו-$S \subseteq R$ תת קבוצה של R. הוכיחו כי $(S,+,\cdot)$ הוא חוג אם ורק אם:

a. $S \neq \phi$

b. לכל $a,b \in S$ מתקיים $a+b, ab, -a \in S$.

ב. הראו בעזרת סעיף א או בכל דרך אחרת כי הקבוצה $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ עם כפל וחיבור מטריצות היא חוג. הראו גם כי יש לו יחידה והיא *שונה* ממטריצת היחידה.

שאלה 2

הראו כי כל אחד מהבאים הוא חוג. קבעו האם הוא חילופי והאם יש לו יחידה.

א. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \coloneqq \{a + b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ עם כפל וחיבור של מספרים ממשיים.

ב. $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

ג. $(\mathbb{R}_+,\oplus,\otimes)$ באשר $a \oplus b = ab$ ו-$a \otimes b = e^{\ln a \cdot \ln b}$.

שאלה 3

הראו כי כל אחת מהקבוצות הבאות <u>אינה</u> חוג ביחס לפעולות הנתונות.

א. $(\mathbb{C},\oplus,\otimes)$ באשר $z \oplus w = z + w + 1$ ו-$z \otimes w = zw$ לכל $z,w \in \mathbb{C}$.

ב. $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,d \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{Z} \right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

ג. $(\mathbb{N},\oplus,\otimes)$ באשר $a \oplus b = \max\{a,b\}$ ו-$a \otimes b = a + b$.

שאלה 4

נגדיר תת קבוצה H של $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ע"י $H = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \middle| z,w \in \mathbb{C} \right\}$.

א. העזרו בשאלה 1 סעיף א כדי להוכיח ש-H חוג.

ב. הראו כי H חוג עם חילוק (כלומר כל איבר למעט 0 הפיך) ושהוא אינו חילופי.

הערה: החוג H נקרא לעיתים *המספרים הקווטרניונים*.