

אנליזה מודרנית – תרגול 8

נפתח בשאלה ממבחן (תשס"ט):

1. יהי (X, S) מרחב מדיד.

א. הגדירו פונקציה מדידה על (X, S)

ב. נניח ש- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה (S). הוכיחו כי הפונקציה $f + \sin f$ מדידה (S).

ג. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה לבג (dm), ונניח ש- $f'(x)$ קיים כב"מ (dm). הוכיחו כי $f'(x)$ מדידה (dm).

פתרון:

ב. $f + \sin f$ מדידה כהרכבה של פונקציה רציפה $x \mapsto x + \sin x$ עם הפונקציה המדידה f

לצורך הוכחת סעיף ג' נוכיח טענת עזר:

אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה לבג, אזי גם כל הזזה שלה $f(x-c)$ מדידה לבג.

הוכחה:

וזו מדידה כהזזה של מדידה $\{x \in \mathbb{R} : f(x-c) < \alpha\} = \{y \in \mathbb{R} : f(y) < \alpha\} + c$

ג. נגדיר $E = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \text{ exists}\}$, ומהנתון $m(E^c) = 0$. נגדיר סדרת פונקציות $\{f_n\}$

ע"י $f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$. פשוט לראות שלכל $x \in E$ מוגדרת פונקציית הגבול

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ושווה ל- $f'(x)$. ע"פ הטענה f_n כולן מדידות לבג, כחיסור וחילוק של פונקציות

מדידות, ולכן גם פונקציית הגבול שלהן $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ תהיה מדידה לבג. כל זה נכון בקבוצה

E , אך מה לגבי E^c ? התשובה היא **שלא משנה** כיצד נגדיר את " $f'(x)$ " מחוץ ל- E שכן

מדובר בקבוצה ממידה אפס ומידת לבג היא מידה שלמה.

תרגיל:

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. האם בהכרח קיים קטע בו f מונוטונית?

פתרון: התשובה שלילית. באינפי' בונים פונקציות רציפות שאינן גזירות בשום נקודה (למשל פונקציית וירשטראס).

ניקח את f להיות כזו, לצורך דוגמא נגדית. אילו היה קטע $I \subseteq \mathbb{R}$ שבו f מונו', משפט הגזירה של לבג היה אומר כי f גזירה כב"מ בקטע – אך זה לא ייתכן!

רציפות בהחלט:

הגדרה: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ אזי δ אולי

תרגיל: תהינה $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות בהחלט ו- c קבוע. הוכיחו:

א. cf רציפה בהחלט.

ב. $f + g$ רציפה בהחלט.

ג. fg רציפה בהחלט.

פתרון:

א. יהי $\varepsilon > 0$ ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , עם $\varepsilon \mapsto \frac{\varepsilon}{|c|}$ נקבל כי קיים $\delta > 0$ כך שאם $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ אזי δ אולי

עבור אותו δ , בהינתן קטעים $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$ עם סכום אורכים קטן מ- δ , נקבל כי

$$\sum_{k=1}^n |cf(b_k) - cf(a_k)| = \sum_{k=1}^n |c| |f(b_k) - f(a_k)| = |c| \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

ב. ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , ישנו $\delta_1 > 0$, כך שאם $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים

זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_1 אזי $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$. ע"פ הרציפות בהחלט של g

ישנו $\delta_2 > 0$, כך שאם $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_2 אזי

נגדיר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ אם $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים

שסכום אורכם קטן מ- δ אזי,

$$\sum_{k=1}^n |(f+g)(b_k) - (f+g)(a_k)| \leq \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{k=1}^n |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon$$

ג. f, g רציפות בקטע סגור, ולכן חסומות (כלומר $|f(x)|, |g(x)| \leq M$ לאיזשהו M)

ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט (לשתי הפונקציות) ישנו $\delta > 0$ כך שאם $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)|, \sum_{k=1}^n |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2M}$. עבור אותו δ נקבל:

$$\sum_{k=1}^n |(fg)(b_k) - (fg)(a_k)| = \sum_{k=1}^n |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k) - f(b_k)g(a_k) + f(b_k)g(a_k)| \leq \sum_{k=1}^n |f(b_k)(g(b_k) - g(a_k))| + \sum_{k=1}^n |g(a_k)(f(b_k) - f(a_k))| < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

הגדרה: נאמר כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מקיימת את **תנאי ליפשיץ**, אם יש קבוע L כך שלכל $x, y \in [a, b]$ מתקיים $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

תרגיל:

א. הוכיחו כי אם $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אזי היא רציפה בהחלט.

ב. נניח כי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ היא ממחלקה C^1 (גזירה ברציפות). הוכיחו כי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

פתרון:

א. יהי $\varepsilon > 0$. נניח כי $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, אם כך

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^n L|b_k - a_k| < \varepsilon$$

ב. מהנתון f' רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ ולכן חסומה שם ($|f'(x)| \leq M$). יהיו

$x, y \in [a, b]$ כלשהם, ע"פ משפט הערך הממוצע של לגראנז' מתקיים

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq M|x - y|$$

זהו בדיוק תנאי ליפשיץ. (בעתיד נוכיח את ב' עם הנחות מקלות יותר).

תרגיל ממבחן (תשע"א):

2. א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע ב- \mathbb{R}

ב. צטטו את הכללת לבג ל"משפט היסודי של חשבון אינטגרלי" (שני חלקים)

ג. תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג, ותהי I_E האינדיקטור של E . הוכיחו שלכמעט כל $a \in E$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} I_E(x) dm = 1 \quad (\text{ביחס למידת לבג})$$

פתרון סעיף ג:

נסתכל על הפונקציה $F_n(x) = \int_n^x 1_E dm$ המוגדרת לכל $x \in [n, n+1]$. ע"פ הכללת לבג למשפט היסודי חלק א', F_n גזירה כב"מ ו $F_n'(x) = I_E(x)$ כב"מ בקטע $[n, n+1]$. נסמן את הקבוצה ב $[n, n+1] \cap E$ שבה $F_n'(x) \neq I_E(x)$ וברור כי $m(D_n) = 0$. כעת, עבור כמעט כל $a \in [n, n+1] \cap E$ מתקיים

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\frac{F_n(a+h) - F_n(a)}{h} + \frac{F_n(a) - F_n(a-h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} (F_n(a+h) - F_n(a-h)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2h} \int_n^{a+h} 1_E dm - \frac{1}{2h} \int_n^{a-h} 1_E dm \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} 1_E dm = F_n'(a) \end{aligned}$$

ולכן, עבור כמעט כל a מתקיים $F'(a) = 1$. הקבוצה של ה a ים ב E שעבורה $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} I_E(x) dm = 1$ לא מתקיים, מוכלת ב $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} D_n$ וכמובן ש $m\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} D_n\right) = 0$ ולכן מתקיים כמעט עבור כל $a \in E$ $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} I_E(x) dm = 1$.

לפניכם הפתרון הבא,

ברור כי I_E אינט' בכל קטע סגור. נגדיר $F(x) = \int_a^{a+x} I_E dm$. ע"פ הכללת לבג למשפט היסודי חלק א', F גזירה כב"מ ו $F'(x) = I_E(x)$ כב"מ. ניתן לרשום את הגבול כך $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(a+h) - F(a-h)}{2h}$ וזוהי בדיוק ההגדרה של "הנגזרת הסימטרית" של F בנקודה a . היכן ש- F גזירה, הנגזרת הסימטרית מתלכדת עם הרגילה.

כמעט לכל $a \in E$ $F'(a) = I_E(a) = 1$ וכב"מ $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} I_E(x) dm = F'(a)$ ובסה"כ $a \in E$ כמעט לכל

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} I_E(x) dm = 1 \text{ כנדרש.}$$

הסבירו מדוע הפתרון שגוי.