גאומטריה אקסיומטית- פתרון תרגיל 4

הוכיחו את משפט $H.1$:

א. $P = P'$ אם ורק אם P על מעגל ההפיכה γ.

הוכחה

נוכיח שנקודה על γ עוברת לעצמה.

נקודה P על γ מקימת: $|OP| = r$ כאשר O מרכז המעגל γ ו $r > 0$ רדיוס.

ולכן עפ"י המשוואה $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ נחלץ את $|OP'|$ ונקבל:

$r = \frac{r^2}{|OP|=r} = |OP'| \Leftarrow |OP'| = |OP| \Leftarrow P = P'$, כיוון ש-$P$ ו-P' **נמצאות על אותה קרן** ומקימות שמרחקן מהראשית שווה [$|OP| = |OP'|$].

ב. אם P בתוך γ אז P' מחוץ ל-γ, ולהיפך, אם P מחוץ ל- γ אז P' בתוך γ.

הוכחה

למעשה אנחנו מוכיחים נוכיח שהעתקה מחליפה את פנים המעגל בחוץ.

כל נקודה P בפנים המעגל מקימת את אי-השוויון הזה: $r > |OP|$.

ולכן עפ"י המשוואה $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ וכיוון שאנו יודעים כי $r > |OP|$ אזי בהכרח על מנת שהמכפלה תתן לנו r^2 נבדוק את האורך $|OP'|$. האופציות הן:

אם $r > |OP'|$ נקבל $r^2 > \underbrace{|OP|}_{<r} \cdot \underbrace{|OP'|}_{<r}$ ולכן נפסל.

אם $r = |OP'|$ נקבל $r^2 > \underbrace{|OP|}_{<r} \cdot \underbrace{|OP'|}_{=r}$ ולכן נפסל.

(*) ורק כאשר $r < |OP'|$ נוכל לקבל $|OP| \cdot |OP'| = r^2$, כי רק משהו שקטן מ-r כפול משהו שגדול מ-r יכול לתת לנו $r^2 \Leftarrow r < |OP'|$.

כלומר כל הנקודות בפנים המעגל $r > |OP|$ מועתקות לחוץ המעגל $r < |OP'|$.

אותו דבר ההיפך – כל הנקודות מחוץ למעגל מועתקות לפנים המעגל.