(1) 13.10.13
אנליזה פונ'
תרגול 1

יהונתן סלמן
yoni-sal@bezeqint.net

<u>הגדרה:</u> מרחב וקטורי E מעל k (k שווה ל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) נקרא מרחב נורמי
אם לכל $k\in E$ מתאים מס' ממשי אי שלילי $\|x\|$ הנקרא <u>הנורמה</u>
<u>של x</u> המקיים לכל $\alpha\in k$, $x,y\in E$:

א. $\|x\|\geq 0$ ו $\|x\|=0 \iff x=0$

ב. $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $\alpha\in k$

ג. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (אי שוויון המשולש)

[הנורמה הזו מכלילה את האורך שאנחנו מכירים]

דוגמאות טריוויאליות לנורמה:

- אם נבחר $\mathbb{R}$ או $E=\mathbb{C}$ מעל השדה $\mathbb{R}$ אז ערך מוחלט $|x|$ הוא נורמה על E.
- עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $\mathbb{R}^n=\{(x_1 \dots x_n) \mid x_1 \dots x_n \in\mathbb{R}\}$,
  אז נגדיר נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^n$ לפי:

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2} \qquad (x=(x_1 \dots x_n))$$

<u>שאלה:</u> נניח E מ"נ (מרחב נורמי) מעל k. האם הפונקציה ~~[illegible]~~ $f(x)=0$ לכל x היא נורמה?

<u>תשובה:</u> לא, אלא אם כן $E=\{0\}$. הפונק' שלוקחת כל איבר לס' תהיה לא נורמה כי היא לא מקיימת את תכונה 1 ; שהנורמה של x היא 0 אמ"מ x הוא 0.

<u>הגדרה:</u> נגדיר את המרחב ℓ^∞ כקבוצת כל הסדרות החסומות של מס' ממשיים

$$\ell^\infty=\{(a_1,a_2,a_3 \dots) \ \exists m>0,\ |a_i|\leq m,\ \forall i\geq 1\}$$

ועל מרחב זה נגדיר נורמה $\|\cdot\|$ בצורה הבאה: $\|x\|=\sup_{i\geq 1}|a_i|$ $[x=(a_1,a_2 \dots)]$

[$\sup\{a_i\}$ הוא המס' הקטן ביותר m המקיים $m\geq a_i$ לכל i]

<u>תרגיל:</u> הוכיחו ש $\|\cdot\|$ היא אכן נורמה.

<u>פתרון:</u> יהי $x\in\ell^\infty$, $x=(a_1,a_2 \dots)$ אז:

- צ"ל ש $\|x\|\geq 0$

$\Leftarrow$ נובע מהגדרה כי לוקחים סופרמום של מספרים חיוביים ($\sup|a_i|$)

2 13.10.13
שלומית כהן
תרגיל 1

- נוכיח ש $\|x\|=0 \iff x=0$

כיוון ראשון: אם $X=0$ אז סופרמום @ נקבל האפס הוא אפס
כיוון שני: אם $\|x\|=0$ אז $\sup_{i\ge1}|x_i|=0$, כלומר לכל i $|x_i|\le 0$ ולכן $x_i=0$

- נוכיח ש: $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$

מקרה 1: אם $\alpha=0$ אז השוויון ברור

מקרה ב: אם $\alpha\neq0$: נסמן $M=\sup_{i\ge1}|a_i|$, $N=\sup_{i\ge1}(\alpha a_i)$

וצריך להוכיח: $N=|\alpha|\cdot M$

הוכחה: • מהגדרת M נובע ש $|a_i|\le M$ לכל i ולכן $|\alpha| M\ge|\alpha a_i|$
לכל i ולכן לפי הגדרת N כי N הוא החסם הקטן ביותר שמקיים
$N \ge |\alpha a_i|$) ולכן $\underline{|\alpha|\cdot M\ge N}$

• מהגדרת N: $N\ge \alpha a_i$ לכל i ולכן $\frac{N}{|\alpha|}\ge a_i$ לכל i.
מהגדרת M (M הוא החסם המינימלי שמקיים $M\ge|a_i|$) נובע ש
$M\ge\frac{N}{|\alpha|}$ ולכן $\underline{N\ge|\alpha| M}$

ומשני השיוויונים שקיבלנו נובע ש $N=|\alpha|M$

- נוכיח ש $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

נסמן: $M=\|x+y\|=\sup_{i\ge1}|x_i+y_i|$

$P=\|x\|=\sup|x_i|$, $Q=\|y\|=\sup|y_i|$

רוצים להוכיח ש $M\le P+Q$.

לפי הגדרת P: $P\ge|x_i|$ לכל i
ולפי הגדרת Q: $Q\ge|y_i|$ לכל i

$P+Q\ge|x_i|+|y_i|\ge|x_i+y_i|$ לכל i

לכן $P+Q\ge|x_i+y_i|\underset{\text{הגדרת } M}{\le}M$ לכל i ולכן מהגדרת M נובע כי $P+Q\ge M$.

13.10.13 (3)
אנליזה פונ'
תרגול 1

הגדרה: יהי E מרחב נורמי עם נורמה $\|\cdot\|$.

תהי $\{x_n\}\subseteq E$ סדרת איברים ב-E ו-$x\in E$.

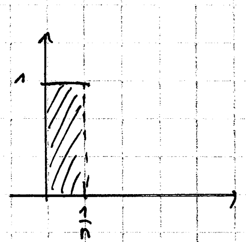
אומרים שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת לאיבר x ביחס לנורמה $\|\cdot\|$,

אם $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, ומסמנים $x_n\to x$.

דוגמה: נסמן $X=C([0,1])$.

כל הפונ' המוגדרות והרציפות בקטע $[0,1]$ וערכיהם ממשיים.

נגדיר נורמה לפי $\|f\|=\int_0^1|f(t)|dt$



נגדיר סדרת פונקציות: $f_n(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1/n\\ 0 & 1/n< t\le 1\end{cases}$

נראה ש-$f_n\to 0$:

$$\|f_n-0\|=\|f_n\|=\int|f_n(t)|dt=\int_0^{1/n}1\cdot dt=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

עכשיו, אם על X נגדיר את הנורמה $\|\cdot\|_2$: $\|f\|_2=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|$

נראה ש-$f_n\not\to 0$:

$\|f_n-0\|=\|f_n\|=1$ (לכל n)

מסקנה: התכנסות תלויה בנורמה.

הגדרה: יהי E מרחב וקטורי ויהיו $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ שתי נורמות על E.

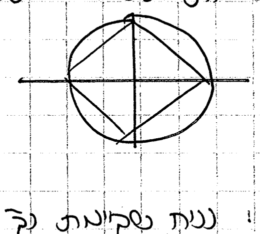
$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ נקראות **שקולות** אם עבור סדרת איברים $\{x_n\}\subseteq E$ ו-$x\in E$

מתקיים $\|x_n-x\|_1=0 \iff \|x_n-x\|_2=0$

דוגמה: נוכיח שהנורמות על R^2 שקולות:

$\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$

$\|(x,y)\|_1=|x|+|y|$



פתרון: כיוון ראשון: נניח שקיימת נק' (x_0,y_0) וסדרה (x_n,y_n) כך ש:

$$|x|+|y|\le\lim_{n\to\infty}\|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)\|_1=0$$

כלומר,
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}=0$$

(1) 13.10.13
[illegible]
(תרגול)

רוצים להוכיח ש $\lim_{n\to\infty} |x_n-x_0|+|y_n-y_0|=0$

$$|x_n-x_0| = \sqrt{|x_n-x_0|^2} \le \sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובאותו אופן $|y_n-y_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n-x_0|+|y_n-y_0| = \lim_{n\to\infty} |x_n-x_0| + \lim_{n\to\infty} |y_n-y_0| = 0$$

ובכך הוכחנו גם את הכיוון השני.