פתרון תרגיל 7 – אינפי' 1

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו/הפריכו:

א. אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר

<u>הוכחה</u>: $\sum b_n$ מתכנס ולכן $b_n \to 0$ ולכן $\frac{1}{b_n}$ לא מוגדר או לא חסום ובכל מקרה אינו שואף לאפס ולכן הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ בוודאי מתבדר.

ב. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum a_n^2$ מתכנס

<u>הוכחה</u>: $\sum a_n$ מתכנס ולכן $a_n \to 0$. ניקח $\varepsilon = 1$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon = 1$ ולכן $a_n^2 = |a_n|^2 = |a_n| \cdot |a_n| \le 1 \cdot |a_n| = |a_n|$ אבל $\sum a_n$ טור חיובי ולכן $|a_n| = a_n$ ולכן קיבלנו $a_n^2 \le a_n$ ולפי מבחן ההשוואה $\sum a_n^2$ מתכנס.

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו שטור חיובי $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

<u>פתרון</u>

$\Leftarrow$: מכיוון שהטור $\sum a_n$ מתכנס, מתקיים $a_n \to 0$ ולכן $\lim \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim \frac{1}{1+a_n} = 1$, מכאן שגם הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

$\Rightarrow$: מכיוון שהטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס, מתקיים $\lim \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ ולכן $\lim \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim \frac{1}{1+a_n} = \lim \left(\frac{1+a_n}{1+a_n} - \frac{a_n}{1+a_n} \right) = \lim \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n} \right) = 1$. מכאן שהטור המקורי מתכנס.

שאלה 3

חשבו את סכומי הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$

פתרון

סעיף א

$$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

$$S_N=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$$

[לאחר צמצום] $=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$1+\frac{1}{n+1}\to 1$ ולכן $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\to 0$ ולכן $S_N\to\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ולכן סכום הטור הוא $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

סעיף ב

תחילה נפרק את האיבר הכללי לשברים חלקיים ונקבל $\frac{1}{(n+2)(n+4)}=\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{2(n+4)}$. נכתוב כעת את האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים:

$$S_n=\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 5}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 6}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 7}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 6}-\frac{1}{2\cdot 8}\right)+\dots$$
$$+\left(\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{2\cdot(n+2)}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot(n+1)}-\frac{1}{2\cdot(n+3)}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot(n+2)}-\frac{1}{2\cdot(n+4)}\right)$$

לאחר צמצום נקבל $S_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2(n+3)}-\frac{1}{2(n+4)}$. קל לראות ש- $\lim S_n=\frac{7}{24}$ וזהו סכום הטור.

<u>שאלה 4</u>

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור. נגדיר סדרה $\{b_n\}$ על ידי $b_{2n}=0,\ b_{2n-1}=a_n$. כלומר, $\{b_n\}=\{a_1,0,a_2,0,...\}$. הוכיחו: $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$; ואם הם מתכנסים, אזי סכומם זהה.

<u>פתרון</u>

נסמן ב- S_n^b את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, וב- S_n^a את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. נשים לב שמתקיים $S_{2n}^b=S_n^a,\ S_{2n-1}^b=S_n^a$.

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, נניח לסכום S, אזי $S_{2n}^b=S_{2n-1}^b\to S$ ולכן הסדרה $\{S_n^b\}$ מתכנסת ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס וסכומו S.

הכיוון ההפוך באופן דומה.

<u>שאלה 5</u>

קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או לא (והוכיחו):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\frac{1}{\ln n}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$

נשווה את הטור הנתון עם הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ (מבחן השוואה שני):

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ ולכן הטור מתבדר כמו הטור ההרמוני.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{2+(-1)^n}{2}}$

הטור מתבדר. קל לראות שהסדרה $n^{\frac{2+(-1)^n}{2}}$ אינה שואפת לאפס ולמעשה

$n^{\frac{2+(-1)^n}{2}}\geq n^{\frac{2-1}{2}}=n^{\frac{1}{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ולכן לא מתקיים התנאי הכרחי להתכנסות הטור.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

מתקיים $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, ומכיוון ש-$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to e$, האיבר הכללי של הטור

אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר.

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ עבור $a>0$ קבוע.

ניעזר במבחן המנה של ד'אלמבר . נסמן $a_n=\frac{a^n}{n!}$. מתקיים

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}$. מכאן $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0<1$ ולכן הטור

מתכנס עפ"י מבחן המנה.

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2^n}$

תחילה "נפשט" קצת את המצב. שימו לב שמתקיים $\frac{n}{n+2^n}<\frac{n}{2^n}$. נתבונן

בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. מתקיים $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ ולכן לפי מבחן המנה, הטור

מתכנס. כעת, ממבחן ההשוואה הראשון נובע שגם הטור המקורי מתכנס.

ז. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

נשווה את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ לטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ לפי מבחן השוואה גבולי.

מתקיים $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n}}=\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}}$.

לכן $1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}}$. מכאן הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ "חברים" ומהתבדרות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ נסיק ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ מתבדר.

ח. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{(2n)!}$

הטור אינו מתכנס שכן האיבר הכללי אינו שואף לאפס. על מנת להראות זאת, מספיק להוכיח ש- $\frac{(n!)^n}{(2n)!}\geq 1$, או $(2n)!\leq (n!)^n$, ומכאן נקבל הדרוש. ואי שויון זה ניתן להראות באינדוקציה.

ט. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

קל לראות שזו סדרה מונוטונית יורדת לאפס חיובית, (כי גם n וגם $\ln n$ מונוטוניות עולות לאינסוף). לכן נפעיל את מבחן העיבוי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln(2^n)}$ מתכנס. אבל זה שווה ל $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln(2^n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}$ וזה מתבדר ולכן כך גם הטור המקורי.