

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 88211
המרצה: מיכאל מגרל
המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן
מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)
בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.

השאלות:

1. א. הוכיחו שכל חבורה G עם $|G| = p^n$ איברים (p ראשוני) תמיד פתירה.
ב. (7 תירגול) תהא G חבורה מסדר p^2q עבור p, q ראשוניים. הוכיחו ש- G לא פשוטה.
פתרון:
אם $r_p = 1$ או $r_q = 1$ אז סיימנו. אחרת נניח $r_p = q \wedge r_q \in \{p, p^2\}$.
אם Q היא תת חבורה q -סילו אזי היא ציקלית וכל איבר ב- $Q \setminus \{e\}$ יוצר אותה. לכן יש ב- G איברים מסדר q .
אם $r_q = p^2$ אזי יש $p^2(q-1)$ איברים מסדר q . מכיוון שיש ב- G p^2q איברים, נקבל שנותרו רק p^2 איברים שאיחודם הוא תת חבורה מסדר p^2 .
[הסבר למשפט האחרון: $|G| = p^2$ ולכן יש תת חבורה מסדר p^2 שבה כל האיברים הם מסדר שמחלק את p . יש $p^2(q-1)$ איברים מסדר q . לא מחלק את p ולכן ה- p^2 איברים האלה זה מה שנותר].
זאת אומרת, יש תת חבורה יחידה מסדר p^2 והיא תת חבורה p -סילו ולכן $r_p = 1$, בסתירה להנחה הראשונית.
לכן $r_q = p$ וגם $r_p = q$ ולכן $p \equiv 1 \pmod{q} \wedge q \equiv 1 \pmod{p}$ וזאת סתירה, כי אם למשל $p < q$ (בה"כ) אזי $p \equiv p \pmod{q} \not\equiv 1 \pmod{q}$.
- ג. הוכיחו ש G/H אבלית אם $G' \subseteq H$.

2. א. הוכיחו את משפט Lagrange.
ב. הוכיחו שאם $f: X \rightarrow Y$ אפימורפיזם של חבורות סופיות אזי $|Y|$ מחלק את $|X|$.
ג. (תירגול 5) הוכיחו שבחבורה A_4 לא קיימת ת"ח עם 6 איברים.
פתרון:

נתבונן ב- A_4 . מתקיים $|A_4|=12$. כמו כן 6 מחלק את 12, ונראה שאין ל- A_4 תת חבורה מסדר 6.

נניח בשלילה שקיימת $H \leq A_4$ כך ש- $|H|=6$. אזי $[A_4:H]=2$. לכן, לפי תרגיל משיעור קודם,

האיברים ב- A_4 הם מהצורה $(---)$ או $(--)(--)$ ולכן הסדרים האפשריים הם 1,2,3.

לכל $\sigma \in A_4$ מתקיים $\sigma^2 \in H$. יהי $\sigma \in A_4$ מחזור מאורך 3. אזי $\sigma^2 \in H$ וכן

$\sigma^2 \sigma^2 = \sigma^4 = \sigma \in H$. כל המחזורים מאורך 3 נמצאים ב- A_4 ועכשיו ראינו שהם נמצאים גם

ב- H . מספר המחזורים מאורך 3 ב- H הוא: $2! \binom{4}{3} = 8$. זאת אומרת שיש ב- H לפחות 8

איברים, וזו סתירה להנחה $|H|=6$.

3. א. נניח G חבורה מסדר p^2 כאשר p ראשוני. הוכיחו ש- G אבלית ומתקיים

$$|Aut(G)| > p^2 - 2p.$$

פתרון: ל G יש מרכז לא טריוויאלי. בה"כ $H = \langle h \rangle$ עם p אלמנטים.

$G/H = \langle [a] \rangle$ ציקלית. כל איבר ב G ניתן להציג כ $a^i h^j$. הם מחלפים ...

$$b. \text{ הוכיחו או הפריכו: } T^*/T \cong T/\Omega_\infty$$

(כאשר $T := \{z \in C \mid \|z\|=1\}$ ו Ω_∞ חבורה של כל שורשי יחידה).

ג. עבור החבורה $G := U_{10} \times_{35}$ תארו תמונות אפימורפיות ומצאו $|Aut(G)|$.

4. (שיעורי בית 3 שאלה 10 סעיף ד)

א. נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H = \{\sigma \in S_6 : \sigma(2)=2, \sigma(4)=4, \sigma(6)=6\}$.

הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3 .

ב. האם היא תת חבורה נורמלית?

ג. הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות K, L כך ששתייהן איזומורפיות ל- S_3 ו-

$$L \cap K = \{id\}$$

5. א. הוכיחו את משפט Burnside.

ב. מצאו את מספר הלוחות 4×4 הלא שקולים עד כדי סיבובים אם מותר לצבוע ב 3 צבעים קבועים.

ג. הוכיחו שכל פעולה $G \times X \rightarrow X$ עם מסלול אחד איזומורפית לפעולה מהטיפוס

$$G \times G/H \rightarrow G/H, (g, tH) \mapsto (gt)H$$

שאלת הבונוס: (5 נקודות)

נניח S_p חבורה סימטרית כאשר p ראשוני.

א. מצאו כמה ת"ח מסדר p קיימות ב S_p .

פתרון: $(p-1)!$

ב. באמצעות (א) הוכיחו $p \mid (p-1)! + 1$ (משפט Wilson).

פתרון: $(p-1)! + 1 = n_p p - p + 1 \Rightarrow n_p = (p-2)!$

בגלל משפט סילו נקבל $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$ ומכאן נובע משפט ווחלסון.

😊 **בהצלחה ושנה טובה !**