תורת הקבוצות — תרגיל בית 2

חיים שרגא רוזנר

ג׳ בניסן, תשע״ה*

תקציר

איזומורפיזם סדר, רישא, $\in$־טרנזיטיביות, סודרים, השוואת סודרים, סודר עוקב, סודר גבולי.

תזכורות

1. $\in$־טרנזיטיבות וסודרים

- קבוצה A היא **$\in$־טרנזיטיבית** אם לכל $a \in A$ ולכל $b \in a$ מתקיים $b \in A$.
- $\bigcup A \coloneqq \{x \colon \exists y \in A,\, x \in y\}$, $\bigcap A \coloneqq \{x \colon \forall y \in A,\, x \in y\}$.
- קבוצה A היא **סודר** אם היחס $\in$ הוא יחס סדר טוב עליה ואם היא $\in$־טרנזיטיבית.
- כל איבר של סודר הוא סודר.
- קבוצה $\in$־טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.
- $\varnothing \coloneqq 0$, וזהו הסודר הקטן ביותר ביחס הסדר $\in$.
- תהי $\mathcal{F}$ קבוצת סודרים. אזי $\min \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}$, $\sup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}$. מתקיימות תכונות המינימום והסופרמום.

2. הסודר העוקב, סודרים עוקבים וגבוליים

- $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, וזה הסודר העוקב המיידי של α.
- **סודר עוקב** הוא סודר β שקיים עבורו סודר α כך ש־$\beta = S(\alpha)$.
- **מספר טבעי** הוא סודר שהן הוא והן כל קודמיו הינם סודרים עוקבים או 0. נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים על ידי

$$\omega \coloneqq \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ω הוא הסודר הלא־טבעי הראשון. הוא גם הסודר הגבולי הראשון.

- **סודר גבולי** הוא סודר שאיננו אפס ואיננו עוקב.

3. פונקציות שומרות סדר ורישאות

*להגשה עד יום חמישי כ״ז בניסן (16 אפר׳) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

- תהיינה $(A,<),(B,\prec)$ קבוצות סדורות בסדר מלא, ותהי פונקציה $f\colon A\to B$. נאמר שפונקציה זו היא **שומרת סדר** (או: מונוטונית) אם לכל $x<y\in A$ מתקיים $f(x)\prec f(y)$. אם הפונקציה הזו היא הפיכה, אז היא נקראת **איזומורפיזם סדר**, ונסמן זאת $A\overset{f}{\cong}B$ (ניתן להשמיט את f לפי העניין).
- תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), B תת־קבוצה. נאמר ש־B היא **רישא** של A אם לכל $y\in B$ ולכל $x\in A$ המקיים $x<y$, מתקיים $x\in B$. במילים: רישא היא תת־קבוצה שכל קודמי איבריה הם איברים שלה.
- תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), $x\in A$. נסמן את ה**רישא הנקבעת על ידי x ב־A** כך:

$$\overset{x}{A}:=\{y\in A\colon y<x\}$$

יש רישאות שאינן נקבעות על ידי איבר כלל.

1 $\in$־טרנזיטיביות

1. תהי A קבוצה. הראו כי התכונות הבאות שקולות:

   (א) A היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית.

   (ב) לכל $B\in A$, מתקיים $B\subseteq A$.

   (ג) $\bigcup A\subseteq A$.

   הראינו בכיתה (א) ←(ב)←(ג), ההוכחות לכך מצורפות. השלימו את ההוכחה.

   פתרון

   - (א) ← (ב). תהי A $\in$־טרנזיטיבית, ותהי $B\in A$. נראה כי $B\subseteq A$. יהי $x\in B$, אזי מתקיים $x\in B\in A$, ומכיוון ש־A $\in$־טרנזיטיבית, מתקיים $x\in A$. הראנו, אפוא, כי $B\subseteq A$, כנדרש.
   - (ב) ← (ג). נניח את (ב). כדי להראות את (ג) עלינו להראות שלכל $x\in\bigcup A$ מתקיים $x\in A$. נניח אם כן $x\in\bigcup A$. מהגדרת איחוד, קיים y כך ש־$x\in y\in A$. כעת, לפי (ב), מהנתון $y\in A$ ניתן להסיק ש־$y\subseteq A$. בסך הכל $x\in y\subseteq A$, ובקיצור $x\in A$, והראנו את ההכלה.

2. עבור קבוצה A, נגדיר ברקורסיה על המספרים הטבעיים:

   (א) $A_0:=A$.

   (ב) עבור $n\geq 0$, $A_{n+1}:=A_n\cup\bigcup A_n$.

   נסמן את **הסגור הטרנזיטיבי** (transitive closure) של A על ידי $\mathrm{tc}(A):=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

   הוכיחו: $\mathrm{tc}(A)$ היא הקבוצה ה־$\in$־טרנזיטיבית הקטנה ביותר (מבחינת הכלה) המכילה את A. (לפניכם שלוש טענות: $\mathrm{tc}(A)$ היא $\in$־טרנזיטיבית, מכילה את A, ולכל קבוצה $\in$־טרנזיטיבית B המכילה את A מתקיים $\mathrm{tc}(A)\subseteq B$.)

3. נתון ש־A היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, המקיימת $\{\{\varnothing\}\} \in A$. מצאו דוגמא לקבוצה A שכזו, והראו כי A איננה סודר. הסיקו כי $\in$־ טרנזיטביות איננה מספיקה לבדה לטעון שקבוצה היא סודר. היעזרו בתרגיל הקודם.

4. תרגיל רשות: ההגדרה שלנו לסודר היא: α הוא סודר אם

   (א) היחס $\in$ על α הוא יחס אנטי־רפלקסיבי.

   (ב) יחס זה הוא טרנזיטיבי.

   (ג) לכל תת־קבוצה לא ריקה A של α יש איבר ראשון ביחס השייכות, דהיינו איבר $\gamma \in A$ כך שלכל $\beta \in A$ מתקיים $\gamma \in \beta$ או $\gamma = \beta$.

   (ד) הקבוצה α היא $\in$־טרנזיטיבית.

   ראינו בשאלה הקודמת ש־(ד) לבדו איננו מספיק כדי להראות שקבוצה היא סודר, ואנו נזקקים לבדוק את דרישות (ב) ו־(ג). האם ניתן לוותר על אחת משתי דרישות אלו? לדוגמא, האם קבוצה A $\in$־טרנזיטיבית הסדורה בסדר מלא על ידי $\in$ היא בהכרח סודר?[1]

5. תרגיל רשות: נמקו מדוע מחלקת כל הסודרים ON איננה קבוצה.

2 הסודר העוקב, סודרים עוקבים וגבוליים

ענו על שאלות 1 ו־2, וכן על אחת מהשאלות 3, ו־4.

1. יהיו α, β סודרים הראו כי $\beta \leq \alpha \iff \beta < S(\alpha)$. הסיקו כי $S(\alpha)$ הוא ה**עוקב המיידי**[2] של α.

2. יהיו α, β סודרים הראו כי $S(\alpha) < S(\beta) \iff \alpha < \beta$.

3. יהי $\alpha > 0$ סודר. הראו כי אם ל־α יש איבר אחרון אזי האיבר האחרון הזה הוא $\sup \alpha$, ומתקיים $S(\sup \alpha) = \alpha$, ו־α סודר עוקב. הראו גם כי אם ל־α אין איבר אחרון, אזי $\sup \alpha = \alpha$, ו־α גבולי.
   לשון אחר: α סודר עוקב $\iff$ יש ב־α איבר אחרון $\iff$ $\sup \alpha$ איבר אחרון ב־α, וכן הראו כי α סודר גבולי $\iff$ $\sup \alpha = \alpha$.
   שתי הטענות יחד נותנות קריטריון להבחין בין סודר עוקב לגבולי על פי השאלה אם יש לו מקסימום או לא.

4. הוכיחו את שתי האקסיומות הראשונות מרשימת אקסיומות פאנו:

   (א) לכל $n \in \omega$, $S(n) \neq 0$.

   (ב) לכל $m, n \in \omega$, $m = n \Longrightarrow S(m) = S(n)$.

   (ג) אקסיומת האינדוקציה (לא להוכחה): תהי $A \subseteq \omega$ המקיימת $0 \in A$ וכן לכל $n \in A$ גם $S(n) \in A$. אזי $A = \omega$.

   אקסיומות פאנו מתקיימות עבור קבוצת המספרים הטבעיים ω.

[1] בעתיד אנו צפויים להגיע לאקסיומת היסודיות. מאקסיומת היסודיות ניתן להסיק שלכל קבוצה A, $A \notin A$. בפרט, אם לוקחים את אקסיומת היסודיות, אז ניתן לוותר על דרישה (א).

[2] בקבוצה סדורה סדר מלא, אין בין איבר ל**עוקב המיידי** לו אף איבר אחר.

3 איזומורפיזם סדר, רישאות וטיפוסי סדר

1. תהיינה A,B קבוצות סדורות איזומורפיות סדר. הראו כי כל רישא של A איזומורפית סדר לרישא של B. האם רישא הנקבעת על ידי איבר מתאימה דווקא לרישא הנקבעת על ידי איבר?

2. תהיינה A,B קבוצות סדורות, כך שקיימות פונקציות שומרות סדר בשני הכיוונים: $f\colon A\to B$ וכן $g\colon B\to A$.

   (א) הפריכו: A איזומורפית סדר ל־B.

   (ב) ידוע כי הטענה הופכת לנכונה כאשר ידוע ש־A,B סדורות היטב. האם מספיק לדעת ש־A סדורה היטב?

   שימו לב לדמיון עם משפט קנטור־ברנשטיין.[3]

ב ה צ ל ח ה!

[3] או: משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין.