תרגיל 10

10 בפברואר 2013

1. יהא V מרחב מכפלה פנימית של מטריצות מגודל $n\times n$ מעל $\mathbb{C}$ יחד עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr\left(AB^*\right)$. תהא P מטריצה הפיכה קבועה, נגדיר העתקה לינארית $T_P : V \mapsto V$ על ידי $T_P(A) = P^{-1}AP$. מצא את T_P^*.

2. יהי V ממ"פ כמו בשאלה הקודמת. עבור $M \in V$ נגדיר $T_M(A) = MA$. הוכח ש T_M העתקה אוניטרית אם ורק אם M היא מטריצה אוניטרית.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית, T אופרטור לינארי על V. הוכח שאם לכל $v \in V$ מתקיים $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ אזי T צמודה לעצמה.

פתרון: נשים לב, שמכיוון ש $\langle Tv,\, v\rangle = \overline{\langle Tv,\, v\rangle} = \langle T^*v,\, v\rangle$ מתקיים $\langle (T-T^*)\, v, v\rangle = \langle v,\, v\rangle - \langle T*v,\, v\rangle = 0$ לכל $v\in V$. הבעיה בעצם שקולה להוכחה של $\langle Av, v\rangle = 0 \Leftrightarrow A=0$. ברור שאם $T=0$, אזי $\langle Av, v\rangle = 0$. נוכיח את הכיוון השני. מתקיים $\alpha\overline{\beta}\,\langle Au, v\rangle + \overline{\beta}a\,\langle Av, u\rangle = \langle A\left(\alpha u+\beta v\right), \alpha u+\beta v\rangle - |\alpha|^2\,\langle Au, u\rangle - |\beta|^2\,\langle Av, v\rangle$. (על מנת להשתכנע - יש לפתח את האגף הימין של השוויון). עכשיו, $\langle Av, v\rangle = 0$, ולכן מקבלים, $\alpha\overline{\beta}\,\langle Au, v\rangle + \overline{\beta}a\,\langle Av, u\rangle = 0$. עבור $\alpha=\beta=1$ המשווה שקולה ל $\langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle = 0$. עבור $\alpha=1,\, \beta=i$ השוויון הופך להיות $i\,\langle Au, v\rangle -$ $i\,\langle Av,\, u\rangle = 0$. מקבלים.

$$0 = \langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle - i\left(i\,\langle Au, v\rangle - i\,\langle Av,\, u\rangle\right) = 2\,\langle Au, v\rangle$$

לכן $\langle Au, v\rangle = 0$ לכל u, v ולכן $A=0$.$\blacksquare$

4. יהא $V=\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל המספרים הממשיים.
   (א) הראה ש $\langle z, w\rangle = Re\left(z\overline{w}\right)$ מגדיר מכפלה פנימית על V.
   (ב) מצא העתקה לינארית משמרת נורמה מ V ל $\mathbb{R}^2$ יחד עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
   (ג) לכל $z\in V$ נגדיר $M_z\left(w\right) = zw$. הראה $\left(M_z\right)^* = M_{\overline{z}}$.
   (ד) עבור אילו מספרים מרוכבים M_z צמודה לעצמה?
   (ה) עבור אילו מספרים מרוכבים M_z אוניטרית?

5. יהי V ממ"פ ממימד סופי. יהא W תת־מרחב של V. נזכיר ש $V = W\oplus W^\perp$, כלמר כל וקטור ב V ניתן להציג באופן יחיד על ידי $v = w+w'$, כאשר $w\in W,\, w'\in W^\perp$. נגדיר $T_W(v) = w - w'$.
   (א) הוכח ש T_W אוניטרית וצמודה לעצמה.
   (ב) הוכח שכל אופרטור על V שצמוד לעצמו ואוניטרי הוא מהצורה T_W עבור ת"מ $W\subseteq V$.

בהצלחה