טופולוגיה תרגיל 10 תשע"ז

1. האם $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקו־מנייתית (co-countable) הוא קומפקטי?

2. יהי X מרחב ו$\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על X. הוכיחו כי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $\{B_i\}$ של קבוצות מהבסיס $B_i \in \mathcal{B}$ יש תת־כיסוי סופי.

3. יהי X מרחב ו $A \subseteq X$ תת־קבוצה. נגדיר טופולוגיה על X שבה הקבוצות הפתוחות הן הקבוצה הריקה וכל קבוצה המכילה את A (ודאו שו אכן טופולוגיה). האם X קומפקטי? (הפרידו למקרים לפי הצורך).

4. יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו כי $\cap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.

5. (א) יהי X מרחב טופולוגי ו $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ תת־מרחבים קומפקטיים. הוכיחו כי $\cup A_i$ הוא קומפקטי.

   (ב) מצאו דוגמא נגדית לטענה הקודמת, כאשר מדובר באיחוד של אינסוף תת־מרחבים קומפקטיים.

   (ג) יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כשלהו של תת־מרחבים קומפקטיים. הוכיחו כי $\cap F_i$ קומפקטי.

6. יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף כלשהו של תת־מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך ש $\ldots \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3$. הוכיחו כי $\cap E_i \neq \emptyset$.
   הראו שהדרישה שהתת־מרחבים הם קומפקטיים היא הכרחית.

7. (א) יהי X מרחב טופולוגי אינסופי שבו כל תת־מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו כי X אינו האוסדורף.

   (ב) יהי X מרחב טופולוגי לא בן מנייה ושאינו קומפקטי. הוכיחו כי קיימים בX מספר לא בן מנייה של תת־מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מנייה של תת־מרחבים לא קומפקטיים.

   (ג) יהי X מ"ט כך שכל תת־מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו כי X קומפקטי.