0908-10

הרצאה 10

תזכורת – ה"ל = העתקה לינארית

$T: V \to W$ פונקציה בין שני מ"ו

המקיימת:

$$\forall v_1, v_2 \in V: \quad T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2)$$

$$\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{F}: \quad T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

(שקול: $T(v_1+\alpha v_2) = T(v_1)+\alpha T(v_2)$)

ראינו: $T(0)=0$.

<u>משפט ההגדרה</u> – אם V, W מ"ו, $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V אזי:

$$T(v_1)=w_1$$
$$\vdots$$
$$T(v_n)=w_n$$

מגדיר באופן יחיד ה"ל $T: V \to W$, כאשר $w_1,\dots,w_n \in W$ <u>כלשהם</u>.

<u>הערה</u>: פונק' מוגדרת היטב:

1) $T(v)$ מוגדר (ב-W) לכל $v \in V$

2) חח"ע - $T(v_1)=T(v_2) \Leftarrow v_1=v_2$

קשור מאוד למשפט ההגדרה.

$$v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$$

$$T(v):=\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)$$

אם $v_1,\dots,v_n$ פורשת $\Leftarrow$ כל v ניתן להציג כנ"ל.

אם הקב' פורשת אך לא בת"ל, אולי נקבל מצב:

$$v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=$$

$$=\beta_1 v_1+\dots+\beta_n v_n$$

ואז הגדרנו פעמיים:

$$T(v)=\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)$$

וגם כזה:

$$T(v)=\beta_1 T(v_1)+\dots+\beta_n T(v_n)$$

ואז אין בהכרח חח"ע!

נ"ב - במשפט ההגדרה, הדרישה כי B פורשת דואגת לכך שההעתקה מוגדרת על כל התחום V, ודרישה כי B בת"ל דואגת לכך שההעתקה הינה חח"ע (2.

לכן.

דוגמאות

1) $T: \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^4$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2^2 \\ x_3 + 2x_4 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

. עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ - לא ה"ל! (כי $\alpha T v \neq T(\alpha v)$)

. עבור $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ ניתן לבדוק כי אכן ה"ל.

(ב$\mathbb{Z}_2$)

2) $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ שכל קואורדינטה היא א

משוואה לינארית בקואורדינטות היא - ה"ל.

למשל, $T: \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 - x_4 + x_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_4 - x_3 + x_2 \end{bmatrix}$$

3) $T: \mathbb{F}^{n\times m} \to \mathbb{F}^{k\times m}$

(3 $T : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$

$$T(X) = AX$$

כאשר A מטריצה נתונה ב- $\mathbb{F}^{k\times n}$.

$$\left(\begin{aligned} T(X+\alpha Y) &= A(X+\alpha Y) = \\ &= AX + \alpha AY = T(X) + \alpha T(Y) \end{aligned} \right)$$

למשל:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(4 $T : \mathbb{F}_d[x] \to \mathbb{F}_d[x]$ גזירה

$$T(p(x)) = p'(x)$$ הנ"ל

(5 $T : \mathbb{F}_d[x] \to \underbrace{\mathbb{F}}_{\mathbb{F}^1}$ נתונה ע"י:

מרחב חד-מימדי:

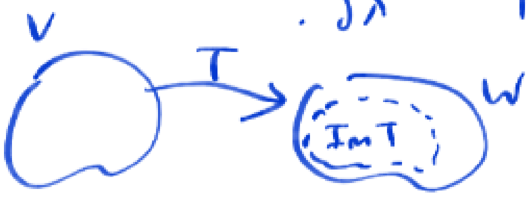
$$T(p(x)) = p(\alpha)$$ הצבה ב- $\alpha \in \mathbb{F}$.

(6 $\rho : \mathbb{F}^{n\times m} \to \mathbb{F}^{n\times m}$ פעולת שורה

מקרה פרטי של 3): $\rho(A)=\rho(I)\cdot A$.

גרעין ותמונה

הגדרה: תהא $T:V\to W$ ה"ל.

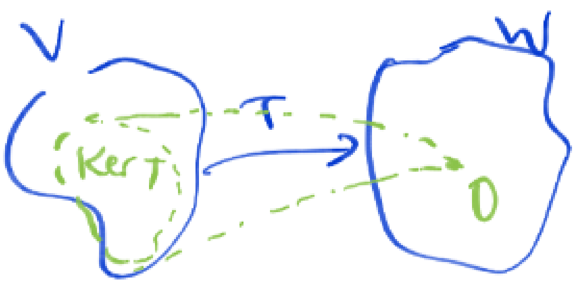


התמונה של T:

$$\operatorname{Im} T := \{Tv \mid v\in V\}$$

הגרעין של T:

$$\operatorname{Ker} T := \{v\in V \mid Tv=0\}$$



(בשפה בדידה: התמונה ההפוכה של 0)

מתקיים: $\operatorname{Im} T \subseteq W$ טווח

$\operatorname{Ker} T \subseteq V$ תחום

טענה: תהא $T:V\to W$ ה"ל, אז:

1) $\operatorname{Im} T \leq W$ ת"מ

2) $\operatorname{Ker} T \leq V$ ת"מ

הוכחה:

1) לפי הקריטריון לתמ"ו:

יהיו $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,T$, $\alpha \in \mathbb{F}$, נראה:

$w_1 + \alpha w_2 \in \mathrm{Im}\,T$.

אזי, $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,T$ לכן יש להם מקורות:

$\exists v_1, v_2 \in V$: $Tv_1 = w_1$, $Tv_2 = w_2$

כעת:

$$T(v_1 + \alpha v_2) \overset{\text{מלינאריות של } T}{=} \overbrace{Tv_1}^{w_1} + \alpha \overbrace{Tv_2}^{w_2} = w_1 + \alpha w_2$$

דהיינו $w_1 + \alpha w_2 \in \mathrm{Im}\,T$ כי יש לו מקור.

לכן, $\mathrm{Im}\,T$ תמ"ו של W.

2) יהיו $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,T$, $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$T(v_1 + \alpha v_2) \overset{\text{מלינאריות } T}{=} \underbrace{Tv_1}_{0} + \alpha \underbrace{Tv_2}_{0} \underset{\text{כי } v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,T}{=} 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

מסקנה: $v_1 + \alpha v_2 \in \mathrm{Ker}\,T$. לכן $\mathrm{Ker}\,T$ תמ"ו של V.

מ.ש.ל.

$(\mathbb{F}=\mathbb{C})$ נמצא $\mathrm{Ker}, \mathrm{Im}$ ובסיסים שלהם:

2) $T:\mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3 \\ x_1+x_2-x_4 \\ x_2+x_3+x_4 \\ x_2-x_3+x_4 \end{bmatrix}$$

$\underline{\mathrm{Ker}\, T \le \mathbb{F}^4}$:

$$\mathrm{Ker}\, T = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} : T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= N(A)$$

נמצא בסיס ל- $N(A)$ נדרג:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow -R_2]{R_3, R_4 \leftarrow +R_2}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = t \Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = -t,\ x_1 = 0$$

לכן:

$$\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{F} \right\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

כלומר,

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T = 1.$$

נחשב תמונה:

$$\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix} \,\middle|\, \exists \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} : T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix} \,\middle|\, \exists \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= C(A)$$

נמצא בסיס: ראינו כי 1,2,3 מובילים

4 חופשי.

לכן:

$$C(A) = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

ולכן לפי. בנוסף,

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T = \dim_{\mathbb{F}} C(A) = 3 .$$

4) נגזרת: $T : \mathbb{F}_d[x] \longrightarrow \mathbb{F}_d[x]$. $(d \geq 1)$

נזכור כי: $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_d[x] = d+1$.

$$\operatorname{Ker} T = \{ p(x) \in \mathbb{F}_d[x] \mid p'(x) = 0 \} =$$

$$= \{ \alpha \mid \alpha \in \mathbb{F} \}$$ פולינומים קבועים..

ולכן $\{1\}$ הוא בסיס ל- $\operatorname{Ker} T$,

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T = 1 .$$

$$\operatorname{Im} T = \{ p(x) \in \mathbb{F}_d[x] \mid \exists g(x) \in \mathbb{F}_d[x] : g'(x) = p(x) \} =$$

$$= \mathbb{F}_{d-1}[x]$$

הוכ': כיוון -

$(\subseteq)$ אם $g(x)$ מדרגה $\geq d$ אז:

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_d x^d$$

ולכן:

$$p(x)=q'(x)=\alpha_1+2\alpha_2x+\dots+d\alpha_d x^{d-1}$$

לכן $\Rightarrow \mathbb{F}_{d-1}[x]$.

(ב) כל פולינום $p(x)\in\mathbb{F}_{d-1}[x]$ מקיים:

$$q(x)=\int p(x)\,dx \in \mathbb{F}_d[x]$$

ומקיים $q'(x)=p(x)$.

בסה"כ,

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T = d.$$

5) $T:\mathbb{F}_d[x]\longrightarrow\mathbb{F}$ הצבה ב-α.

$$\operatorname{Ker} T=\{p(x)\in\mathbb{F}_d[x]\mid p(\alpha)=0\}=$$

מיון קודם

$$=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{x-\alpha,\ x^2-\alpha x,\dots,x^d-\alpha x^{d-1}\}$$

ונכון כי אלו בסיס, לכן:

$$\dim_{\mathbb{F}}\operatorname{Ker} T=d$$

$$\operatorname{Im} T=\{\lambda\in\mathbb{F}\mid \exists\, p(x)\in\mathbb{F}_d[x]:\ p(\alpha)=\lambda\}=$$

$$= \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$$

(קבלנו פולינומים קבועים.)

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T = 1.$$

<u>נסכם את 3 הדוגמאות האחרונות:</u>

$\dim V$	$\dim \operatorname{Ker}$	$\dim \operatorname{Im}$	דוג'
4	1	3	$\left(\cdots\right)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}$
$d+1$	1	d	גזי'
$d+1$	d	1	הצבה

מתקיים: $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T + \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T$

נראה בהמשך.

<u>תזכורת:</u> פונקציה היא <u>חח"ע</u> אם:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

סל אם: הכלות = תמונה.

טענה: תהא $T: V \to W$ ה"ל. אזי T חח"ע $\iff$ $Ker\, T = \{0\}$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי T חח"ע. נניח בשלילה כי $Ker\, T \neq \{0\}$ כלומר קיים $Ker\, T \ni v \neq 0$.

אזי:

$$Tv = 0$$
$$T0 = 0$$

אבל $v \neq 0$

בסתירה לחח"ע.

($\Rightarrow$) נניח $Ker\, T = \{0\}$ ונוכיח כי T חח"ע.

יהיו $v_1, v_2 \in V$ כך ש- $Tv_1 = Tv_2$.

מתקיים: $T(v_1 - v_2) = Tv_1 - Tv_2 = 0$

ולכן $v_1 - v_2 \in Ker\, T$, אבל $Ker\, T = \{0\}$ ולכן:

$$v_1 - v_2 = 0$$

כנ"ל: $v_1 = v_2$ כנדרש. מ.ש.ל.

דוגמה השלכה – [illegible]

[illegible] העתקת הזהות: (V מ"ו)

$$I_V : V \longrightarrow V$$

$$\forall v \in V : \quad I_V(v) = v$$

בפרט ליניארית, חח"ע ועל.

נזכר כי פונק' חח"ע ועל הפיכה. במקרה של ה"ל, ההופכית תהיה ה"ל בעצמה:

<u>טענה:</u> תהא $T: V \to W$ ה"ל חח"ע ועל. אזי $T^{-1}: W \to V$, הפונקציה ההופכית, היא למעשה ה"ל.

<u>הוכחה:</u> $T^{-1}: W \to V$ מוגדרת היטב מהגדרה.
יהיו $w_1, w_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$T^{-1}(w_1 + \alpha w_2) \overset{?}{=} T^{-1}w_1 + \alpha T^{-1}w_2$$

נחשב את:

$$T(T^{-1}w_1 + \alpha T^{-1}w_2) \underset{\text{ליניאריות של } T}{=}$$

$$= T(T^{-1}w_1) + \alpha T(T^{-1}w_2) \underset{\text{הופכיות } T, T^{-1}}{=}$$

$$= I_W(w_1) + \alpha I_W(w_2) = w_1 + \alpha w_2$$

כעת, נפעיל T^{-1} על שני האגפים:

$$T^{-1}\left(T\left(T^{-1}w_1+\alpha T^{-1}w_2\right)\right) = \underline{T^{-1}(w_1+\alpha w_2)}$$

T,T^{-1} הופכיות $\longrightarrow$ $\parallel$

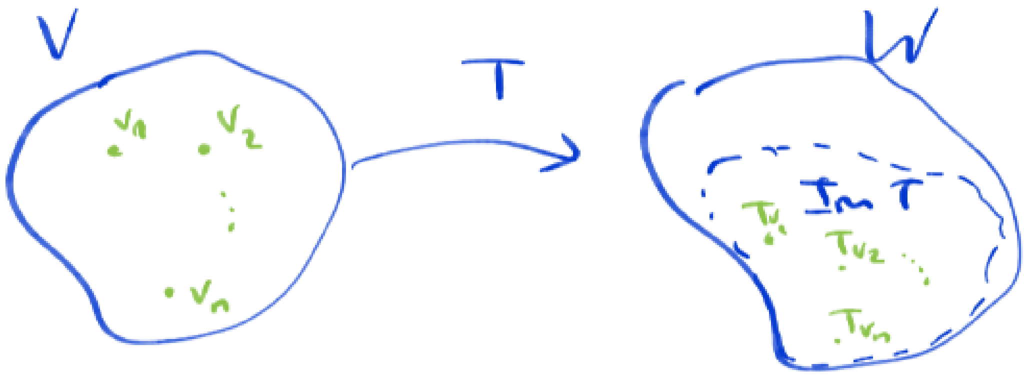
$$I_V\left(T^{-1}w_1+\alpha T^{-1}w_2\right)$$

$$\parallel$$

$$\underline{T^{-1}w_1+\alpha T^{-1}w_2}$$

קיבלנו לינאריות של T^{-1}, כנדרש. מ.ש.ל.

<u>טענה</u>: תהי $T:V\to W$ ה"ל.
נניח כי $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(S)=V$ (S פורשת את V).
נסמן: $S=\{v_1,\dots,v_n\}$. אזי:
$\mathrm{Im}\,T=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$.



הוכחה:

הוכחה: ... רק ...

($\supseteq$): ברור כי $Tv_1,\dots,Tv_n \in \operatorname{Im} T$.

אבל $\operatorname{Im} T$ תמ"ו ולכן אם קבוצה מוכלת בו, אז גם הפרוש שלה מוכל בו (Span), כלומר:

$$\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{Tv_1,\dots,Tv_n\}.$$

($\subseteq$): יהי $w\in \operatorname{Im} T$. אזי קיים $v\in V$:

$$Tv=w$$

אך נתון כי $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ פורשת את V.

לכן,

$$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}: \quad v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$$

כלומר:

$$Tv=T(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)=\alpha_1Tv_1+\dots+\alpha_nTv_n$$

וקיבלנו כי $w=Tv\in\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ כנדרש.
מ.ש.ל.

הערה – T על $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} T$ מכילה קב' הפורשת את הכל.

מסקנות – תהי $T:V\to W$ ה"ל. אזי:

1) $\dim_{\mathbb{F}}\ker T\le\dim_{\mathbb{F}}V$

(2 $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T \le \dim_{\mathbb{F}} W$

(3 $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T \le \dim_{\mathbb{F}} V$

<u>הוכחה</u>: (1 ברור, כי $\operatorname{Ker} T \le V$.

(2 ברור, כי $\operatorname{Im} T \le W$.

(3 יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V.

לפי הטענה שלפני:

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$$

ולכן:

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T \le n = \dim V.$$

(ניזכר כי G קב' פורשת מכילה פורשת מינ' שהיא בסיס, ולכן ממדו של G מרחב קטן שווה מגודל קב' שפורשת אותו.)

משל.

11.05

<u>טענה</u>: יהיו $T:V\to W$ ה"ל, $S:W\to U$ ה"ל.

אזי ההרכבה $S\circ T:V\to U$ ה"ל.

הוכחה: יהיו $v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$(S\circ T)(v_1+\alpha v_2) = S(T(v_1+\alpha v_2)) \overset{T \text{ לינארית}}{=}$$

$$= S(Tv_1 + \alpha Tv_2) \overset{S \text{ לינארית}}{=}$$

$$= S(Tv_1) + \alpha S(Tv_2) = (S\circ T)v_1 + \alpha (S\circ T)v_2$$

כנדרש. מ.ש.ל

מתי יש הפכית מימין/משמאל?

טענה: תהא $T: V\to W$ ה"ל.

(1) אם T חח"ע ⇐ יש ה"ל שהופכת אותה משמאל:

$$\exists S: W\to V : S\circ T = I_V$$

(2) אם T על ⇐ יש ה"ל שהופכת אותה מימין:

$$\exists S: W\to V : T\circ S = I_W$$

הוכחה:

נשתמש במשפט [illegible]...

(1) יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V.

נסמן ב- $B':=\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$.

נטען כי B' קב' בת"ל. הוכחה — נניח שק"ם צ"ל של איברי B' המתאפס ונראה כי הוא טריוויאלי:

$$0=\alpha_1 Tv_1+\dots+\alpha_n Tv_n \overset{\text{לינאריות } T}{=} T(\underbrace{\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n})$$

אך T חח"ע ולכן הגרעין טריוויאלי:

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$$

אך $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ולכן $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.

הוכחנו כי B' בת"ל.

קב' בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס. נשלים:

$$\tilde{B}=\{Tv_1,\dots,Tv_n,w_1,\dots,w_k\}$$ בסיס ל-W.

כעת נעזר במשפט ההגדרה ונגדיר ה"ל:

$$S:W\to V$$

לפי:

$$\left(S(Tv_1)=v_1\right.$$
$$\vdots$$

$$(*)\quad \begin{cases} S(Tv_n) = v_n \\ Sw_1 = 0 \\ \vdots \\ Sw_k = 0 \end{cases}$$

לכן משפט ההגדרה ניתן להגדיר (ביחידות) S כזו.
כמובן, S ה"ל.

נוודא כי S הופכית משמאל של T:

צ"ל – $S \circ T \overset{?}{=} I_V$.

יהי $v \in V$, מכיוון ש-B בסיס ניתן לכתוב:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

ומתקיים:

$$(S \circ T)(v) = S(Tv) = S(T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)) =$$

$$= S(\alpha_1 Tv_1 + \cdots + \alpha_n Tv_n) =$$

$$= \alpha_1 \underbrace{S(Tv_1)}_{v_1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{S(Tv_n)}_{v_n} =$$

$$= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = v$$

כנדרש.   מ.ש.ל. 1

(ב) נניח: $T:V\to W$ הל"ל על, נראה כי

יש הל"ל $S:W\to V$ כך ש-

$$T\circ S = I_W .$$

הוכחה דומה, שוב בעזרת משפט ההגדרה.

יהי $\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס של W.

נתון כי T על, ולכן לכל $w_1,\dots,w_n$ יש מקור:

$$\begin{cases} Tv_1 = w_1 \\ \vdots \\ Tv_n = w_n \end{cases}$$

לפי משפט ההגדרה קיימת הל"ל (יחידה) כך ש-

$$\begin{cases} Sw_1 = v_1 \\ \vdots \\ Sw_n = v_n \end{cases}$$

נטען כי $T\circ S = I_W$. אכן, יהי $w\in W$,

אזי קיים [illegible]:

$$w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

ולכן:

$$(T\circ S)(w) = T(S(w)) = T(S(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n)) =$$

$$= T(\alpha_1 \underbrace{Sw_1}_{v_1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{Sw_n}_{v_n}) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) =$$

$$= \alpha_1 \underbrace{Tv_1}_{w_1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{Tv_n}_{w_n} = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = w$$

מ.ש.ל. ד.

קלול

מתי ה"ל מעבירה בסיס לבסיס?
מתי היא מעבירה פורש לפורש, בת"ל לבת"ל?

טענה: תהא $T: V \to W$ ה"ל.

(1) אם T חח"ע אז $T[B]$ בת"ל לכל קב' בת"ל $B \subseteq V$.

(2) אם T על אז $T[S]$ פורשת לכל קב' פורשת $S \subseteq V$.

(3) אם T חח"ע ועל אז $T[B]$ בסיס לכל בסיס $B \subseteq V$.

הוכחה:

(1) נניח T חח"ע. תהא $B \subseteq V$ בת"ל ונראה כי $T[B]$ בת"ל.

נניח: $B=\{v_1,\dots,v_n\}$, ונניח כי מתקיים:

$$\alpha_1 Tv_1+\dots+\alpha_n Tv_n=0$$

$$\Rightarrow \quad T(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)=0$$

אך T חח"ע ולכן $\ker T=\{0\}$, כלומר:

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$$

אך $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל, ומכאן: $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.

(2) נניח T על. תהי S קב' פורשת של V ונראה כי $T[S]$ פורשת של W.

נסמן $S=\{v_1,\dots,v_n\}$. יהי $w\in W$.

T על ולכן יש ל-w מקור:

$$\exists v\in V: \quad Tv=w$$

אבל S פורשת את V ולכן:

$$\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}: \quad v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$$

ומכאן:

$$w=Tv=\alpha_1Tv_1+\dots+\alpha_nTv_n$$

ולכן $w\in \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$

עמ' 23.   T''[S]

(ג) נוכיח מיידי מ- 1,2.

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>: אומרים כי ה"ל: $T:V\to W$ היא <u>איזומורפיזם</u> אם היא חח"ע ועל.

אומרים כי V,W <u>איזומורפיים</u> אם יש ביניהם <u>איזומורפיזם</u>.
מסמנים: $V\cong W$.

<u>מסקנה</u>: אם $V\cong W$ אז $\dim_{\mathbb{F}} V=\dim_{\mathbb{F}} W$.

<u>הוכחה</u>: יהי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V, אם $T:V\to W$ היא איזומורפיזם אז לפי הטענה הקודמת: $\{Tv_1,\dots,Tv_n\}$ בסיס ל-W.

בפרט, $\dim_{\mathbb{F}} W = n = \dim_{\mathbb{F}} V$.

מ.ש.ל.

<u>טענה</u>: אם $\dim_{\mathbb{F}} V=\dim_{\mathbb{F}} W$ אז $V\cong W$.

כלומר, מרחבים איזומורפיים אם"ם מימדם שווה.

<u>הוכחה</u>: נניח כי $\dim_{\mathbb{F}} V=\dim_{\mathbb{F}} W=n$.

יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V

$\{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס ל- W.

בעזרת משפט ההגדרה נגדיר:

$$T : V \longrightarrow W$$

ע"י:

$$\begin{cases} Tv_1 = w_1 \\ \vdots \\ Tv_n = w_n \end{cases}$$

משפט ההגדרה מבטיח כי T הנ"ל מוגדרת היטב.

נותר להראות חח"ע ועל.

<u>T על</u>: $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq \operatorname{Im} T$

לכן $W = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq \operatorname{Im} T$

לכן, $W = \operatorname{Im} T$, כלומר, T על.

<u>T חח"ע</u>: נניח $v \in \operatorname{Ker} T$ ונראה $v = 0$.

$\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ולכן ניתן להציג:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

מכאן: $0 = Tv = \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n =$

$$= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

אבל $\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס ל-W ולכן כל צ"ל של וקטורים המתאפסים הינו טריוויאלי ולכן קיבלנו:

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ולכן $v=0$,

ולכן T חח"ע, כנדרש.

סה"כ, קיבלנו $T:V\to W$ איזומורפיזם. מ.ש.ל.

הערה: $\dim_F V = \dim_F W$ לא אומר שכל העתקה לינארית $T:V\to W$, היא איזומורפיזם!

לדוגמה, העתקת האפס:

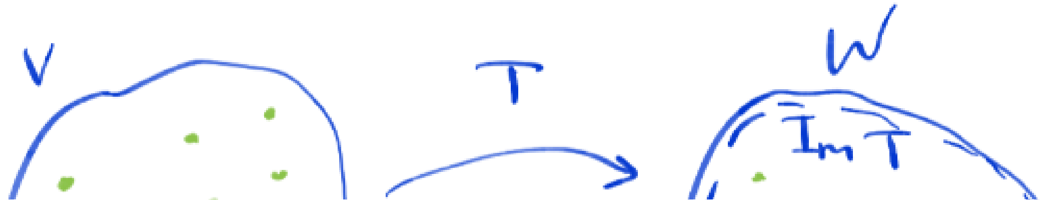
$$T:V\to W$$

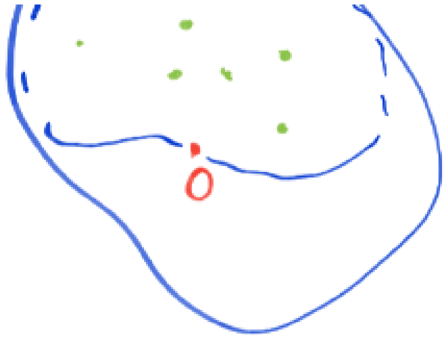
$Tv=0$ $\forall v\in V$.

משפט הדרגה: תהא $T:V\to W$ ה"ל. אזי:

$$\dim_F \operatorname{Ker} T + \dim_F \operatorname{Im} T = \dim_F V.$$

הוכחה:





נסמן:

$$d = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T$$

$$m = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T$$

$$n = \dim_{\mathbb{F}} V$$

נוכיח: $d + m = n$.

יהי $\{v_1, \dots, v_d\}$ בסיס ל- $\operatorname{Ker} T$.

נשלים אותו לבסיס של V כולו:

$$\{\underbrace{v_1, \dots, v_d}_{\text{בסיס ל-}\operatorname{Ker} T}, v_{d+1}, \dots, v_n\}.$$

נוכיח כי: $B := \{Tv_{d+1}, \dots, Tv_n\}$ בסיס ל- $\operatorname{Im} T$.

מעשית ברור כי B מוכל ב- $\operatorname{Im} T$.

<u>B בת"ל</u>: נניח צ"ל המתאפס:

$$(*)\quad \alpha_{d+1} Tv_{d+1} + \cdots + \alpha_n Tv_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(\underbrace{\alpha_{d+1}v_{d+1} + \cdots + \alpha_n v_n}_{\in \operatorname{Ker} T}) = 0$$

ולכן ניתן לבטא כצ״ל של וקטורי $\{v_1, \ldots, v_d\}$ בהיותם בסיס ל- $\operatorname{Ker}T$:

$$\alpha_{d+1}v_{d+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_d v_d$$

נעביר אגפים ונקבל צ״ל של $\{v_1, \ldots, v_n\}$ המתאפס:

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_d v_d - \alpha_{d+1}v_{d+1} - \cdots - \alpha_n v_n = 0$$

ולכן טריוויאלי $\Leftarrow \beta_1 = \cdots = \beta_d = \overbrace{\alpha_{d+1} = \cdots = \alpha_n}= 0$

ולכן הצ״ל ממנו התחלנו $(*)$, הוא טריוויאלי.

כנדרש, B בת״ל.

B פורש את $\operatorname{Im}T$: יהי $w \in \operatorname{Im}T$, אזי קיים $v \in V$ כך ש- $Tv = w$.

אך $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס ל- V, ולכן ניתן לכתוב:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

נפעיל T:

$$w = Tv = \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n =$$

$$= (\alpha_1 \underbrace{Tv_1}_{0} + \dots + \alpha_d \underbrace{Tv_d}_{0}) + (\alpha_{d+1} Tv_{d+1} + \dots + \alpha_n Tv_n) =$$

כי $\{v_1, \dots, v_d\}$ בסיס ל- $Ker\ T$

$$= \alpha_{d+1} Tv_{d+1} + \dots + \alpha_n Tv_n$$

ולכן B פורשת את $Im\ T$. $(\forall w \in Im\ T: w \in Span_{\mathbb{F}} B)$

סה"כ: B בסיס ל- $Im\ T$, לכן:

$$\dim_{\mathbb{F}} Im\ T = |B| = n - d$$

מסקנה. מש"ל

מסקנות:

(1) אם $T: V \to W$ ה"ל על אז:

$$\dim_{\mathbb{F}} W \leq \dim_{\mathbb{F}} V$$

(2) אם $T: V \to W$ ה"ל חח"ע אז:

$$\dim_{\mathbb{F}} V \leq \dim_{\mathbb{F}} W$$

(3) אם $T:V\to W$ ה"ל -! $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$

:אזי

T על $\iff$ T חח"ע.

<u>הוכחה:</u>

(1) משפט הדרגה: אם T על -

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T + \dim_{\mathbb{F}} \overbrace{\operatorname{Im} T}^{W} =$$

$$= \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T + \dim_{\mathbb{F}} W \geq$$

$$\geq \dim_{\mathbb{F}} W$$

(2) אם T חח"ע -

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \overbrace{\operatorname{Ker} T}^{0} + \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T =$$

$$= 0 + \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T \leq \dim_{\mathbb{F}} W$$

(3) נניח $T:V\to W$ ה"ל -! $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$

משפט הדרגה:

$$\dim_{\mathbb{F}} W \overset{\downarrow}{=} \dim_{\mathbb{F}} V \overset{\swarrow}{=} \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ker} T + \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T$$

נכון

T חח"ע $\iff \operatorname{Ker}T=0 \iff \dim \operatorname{Ker}T=0 \iff$

$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im}T=\dim_{\mathbb{F}} W \iff \operatorname{Im}T=W \iff T$ על.

מ.ש.ל.

דוגמה: הוכח או הפרך:

(1) $T: \mathbb{F}^5 \to \mathbb{F}_5[x]$ על?

(2) $T: \mathbb{F}^{3\times 2} \to \mathbb{F}^5$ חח"ע?

(3) $T: \mathbb{F}_5[x] \to \mathbb{F}^{3\times 2}$ על?

פתרון:

(1) לא נכון:

$$\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im} T \le \dim_{\mathbb{F}} V = 5$$

אם T על אז $\operatorname{Im}T=W$, אבל 6,

סתירה.

(2) לא אם $T:\mathbb{F}^{3\times 2}\to\mathbb{F}^5$ חח"ע נקבל כי:

המשפט הנ"ל:

$$6=\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}^{3\times 2} \le \dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}^5 = 5$$

סתירה.

(3) כן

$$\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}_5[x]=6$$

$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{3\times2} = 6$ T'

ראינו כי מ"ו שווי-ממד הם איזומורפיים (לדוג'.

ועל. (תרגיל) $T: \mathbb{F}_5[x] \to \mathbb{F}^{3\times2}$

לבנייה מפורשת ניתן להשתמש בהגדרה:

$$T(\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_5 x^5)=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1\\ \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}$$

$\{1, x, \dots, x^5\}$ $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, e_{31}, e_{32}\}$

בסיס בסיס

<u>טענה</u> (נראה בהרצאה הבאה):

נניח כי שני פולינומים מדרגה $\leq d$ (מעל שדה $\mathbb{F}$) מקבלים את אותם ערכים ב- $d+1$ נקודות שונות

$$f(\alpha_1)=g(\alpha_1)$$
$$\vdots$$
$$f(\alpha_{d+1})=g(\alpha_{d+1})$$

אזי: $f=g$.

= שאלות קודם עד יום שלישי =

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -