פתרונות לתרגיל 1 באינפי 3 ־ תיכוניסטים

1. נזכור כי $x \in \operatorname{Lim} A$ אם לכל $r > 0$ קיים $x \neq a \in A$ כך ש $a \in B(x,r)$.

(א) הפרכה: נניח

$$A = \{(\frac{1}{n},0) \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{(-\frac{1}{n},0) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

אז

$$\operatorname{Lim} A = \operatorname{Lim} B = \{(0,0)\}$$

אבל

$$\operatorname{Lim}(A \cap B) = \operatorname{Lim} \emptyset = \emptyset$$

(ב) הוכחה: נניח ש $x \in \operatorname{Lim}(A \cap B)$ ונוכיח כי $x \in \operatorname{Lim} A$ (בדומה מוכיחים $x \in \operatorname{Lim} B$). יהי $0 < r$, קיים $x \neq a \in A \cap B \subseteq A$ כך ש $a \in B(x,r)$ ולכן ברור ש $x \in \operatorname{Lim} A$.

(ג) הוכחה:

i. צד $\subseteq$: נניח ש $x \in \operatorname{Lim} A \cup \operatorname{Lim} B$, בלי הגבלת כלליות $x \in \operatorname{Lim} A$. לכל $0 < r$ קיים $x \neq a \in A \subseteq A \cup B$ כך ש $a \in B(x,r)$. לכן $x \in \operatorname{Lim}(A \cup B)$.

ii. צד $\supseteq$: נניח ש $x \in \operatorname{Lim}(A \cup B)$. נניח בשלילה כי $x \notin \operatorname{Lim} B$ ו $x \notin \operatorname{Lim} A$. היות ו $x \notin \operatorname{Lim} B$, קיים $r_B > 0$, כך שלכל $x \neq a \in B$ מתקיים כי $a \notin B(x,r_B)$. באופן דומה קיים $r_A > 0$, כך שלכל $x \neq a \in A$ מתקיים כי $a \notin B(x,r_A)$. ניקח $r = \min\{r_A, r_B\}$. היות ו $x \in \operatorname{Lim}(A \cup B)$, קיים $x \neq a \in A \cup B$ כך ש $a \in B(x,r)$. בלי הגבלת כלליות נניח כי $a \in A$. אז $a \in B(x,r) \subseteq B(x,r_A)$ בסתירה לכך ש $a \notin B(x,r_A)$.

(ד) הפרכה: נבחר $A_\mathrm{n} = (\frac{1}{n},0)$ אז $\operatorname{Lim} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,0)$ אבל $\operatorname{Lim} A_n = \emptyset$ ולכן, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Lim} A_n = \emptyset$.

2. נראה כי $(\operatorname{Lim} A)^c$ היא קבוצה פתוחה. נניח $x \in (\operatorname{Lim} A)^c$, נראה כי x נקודה פנימית. היות ו x אינה נקודת גבול של A, קיים $r > 0$ כך ש $B(x,r) \backslash \{x\}$ אינו מכיל נקודות מ A. נראה כי $B(x,r) \subseteq (\operatorname{Lim} A)^c$ ולכן x היא נקודה פנימית. נניח בשלילה כי קיים $l \in \operatorname{Lim} A \cap B(x,r)$. נשים לב ש $x \neq l$ כי x היא לא נקודת גבול. בגלל ש $B(x,r)$ קבוצה פתוחה, קיים $r' > 0$ כך ש $B(l,r') \subseteq B(x,r)$. נבחר $0 < r'' < \min\{r', ||l-x||\}$ (קיים r'' כנ"ל כי $l \neq x$). לכן $x \notin B(l,r'') \subseteq B(x,r)$. בגלל ש l נקודת גבול, קיים $a \in A$ כך ש $a \in B(l,r'') \subseteq B(x,r)$. לכן $a \in B(x,r)$ ו $a \neq x$ (כי $x \notin B(x,r'')$). זאת בסתירה להגדרת r ($B(x,r) \backslash \{x\}$ אינו מכיל נקודות מ A).

.3

(א)

i. הקבוצה אינה פתוחה. הוכחה: נבחר למשל את $(\frac{1}{2},0)$. לכל $r>0$, הנקודה $(\frac{1}{2},\frac{r}{2})$ נמצאת ב $B((\frac{1}{2},0),r)$ אבל לא נמצאת ב A, לכן $(\frac{1}{2},0)$ אינה נקודה פנימית ו A אינה פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי A^c אינה פתוחה, כי $(0,0)$ אינה נקודה פנימית שלה. ובאמת, לכל $r>0$ נוכל לבחור $r'=\min\{r,1\}$ ואז הנקודה $(0,\frac{r'}{2})$ נמצאת ב $B((0,0),r)$ אבל לא נמצאת ב A^c. לכן A היא לא קבוצה סגורה.

(ב)

i. הקבוצה פתוחה. הוכחה: לכל $x\in(0,1)$ נבחר $r=\frac{1}{2}\min\{x,1-x\}$ ואז לכל $y\in B(x,r)$ מתקיים

$$|y-x|<r$$

ולכן

$$y<x+r<x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x<1$$

ו

$$y>x-r>x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x>0$$

ולכן $B(x,r)\subseteq(0,1)$. לכן A פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי A^c אינה פתוחה. נביט על $0\in A^c$. לכל $r>0$, נבחר $r'=\min\{r,1\}$ ואז $\frac{r'}{2}\in B(0,r)\cap A$ ולכן 0 אינה נקודה פנימית של A^c ולכן A אינה סגורה.

.4

(א) אנו טוענים כי הקבוצה סגורה, אינה פתוחה ואינה חסומה.

i. סגורה: נראה כי משלימתה פתוחה. אם (x_0,y_0) נקודה כלשהיא כך ש $x_0\neq y_0$, נניח כי מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $x=y$ הוא $0<d$. נבחר $r=\frac{d}{2}$. המרחק של כל נקודה בכדור $B((x_0,y_0),r)$ מהנקודה (x_0,y_0), הוא לכל היותר $\frac{d}{2}$ והמרחק של כל נקודה על הישר $x=y$ מ (x_0,y_0) הוא לפחות d ולכן אין נקודות שהן גם בכדור וגם על הישר $x=y$. לכן הכדור מוכל ב A^c, כלומר (x_0,y_0) נקודה פנימית של A^c ולכן A^c פתוחה ולכן A סגורה.

ii. לא פתוחה: נבחר את הנקודה $(0,0)$ שנמצאת בקבוצה. לכל $r>0$ מתקיים כי $(0,\frac{r}{2})$ נמצאת בכדור $B(0,r)$ אבל לא בקבוצה A ולכן $(0,0)$ לא נקודה פנימית ולכן A לא פתוחה.

iii. לא חסומה: לכל כדור $B((0,0),r)$ הנקודה (r,r) נמצאת ב A אבל היא מחוץ לכדור.

(ב) נראה כי הקבוצה פתוחה, לא סגורה ולא חסומה.

i. פתוחה: נראה כי כל נקודה היא נקודה פנימית. אם ניקח (x_0, y_0) כלשהיא מתוך B, ונניח שמרחקה מהישר $x+y=-1$ הוא $d>0$. נגדיר $r=\frac{1}{2}\min\{d,|x_0|,|y_0|\}$. בדומה לקודם ברור שכל הנקודות בכדור $B((x_0,y_0),r)$ נמצאות בתוך הקבוצה B ולכן (x_0,y_0) נקודה פנימית. לכן B קבוצה פתוחה.

ii. לא סגורה: נראה שמשלימתה לא פתוחה. נבחר למשל את $(0,0)\in B^c$ אבל לכל $r>0$ מתקיים ש $(\frac{r}{2},-\frac{r}{2})\notin B^c$ ולכן B^c לא פתוחה ו B לא סגורה.

iii. לא חסומה: לכל $r>0$ הנקודה $(r,-r)$ נמצאת ב B ולא נמצאת בכדור $B((0,0),r)$ ולכן B לא חסומה.

5. ראינו שאפשר לבדוק התכנסות של סדרה לפי התכנסות רכיביה. במקרה שלנו

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4n+5}{n^6+2n^2+3}=0,\quad \lim_{n\to\infty}(n+1)[\frac{n}{7}]=\infty$$

לכן לסדרה אין גבול כי אחד מרכיביה לא מתכנס. אפשר להגיד שהיא מתכנסת ל $(0,\infty)$.

6.

(א) כאן הפונקציה רציפה ולכן אפשר פשוט להציב

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)}(4xy^2-x)=4\cdot 1\cdot 3^2-1=35$$

(ב) אם $c\neq 0$ הפונקציה רציפה בסביבת (c,a) ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(c,a)}\frac{\sin(xy)}{x}=\frac{\sin(ca)}{c}$$

אם $c=0$ אז נאמר ש

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\sin(xy)}{xy}y=\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\sin(xy)}{xy}\lim_{(x,y)\to(0,a)}y=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{(x,y)\to(0,a)}y=a$$

(ג) עבור x,y קרובים ל 0 מתקיים כי

$$(x^2)^{x^2y^2}\le(x^2+y^2)^{x^2y^2}\le 1$$

אם נביט על הביטוי השמאלי נראה כי

$$(x^2)^{x^2y^2}=e^{x^2y^2\ln x^2}$$

כעת,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln x^2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln x^2 \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = \lim_{t\to0^+} t\ln t \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0\cdot0 = 0$$

היות ו e^x פונקציה רציפה נקבל כי

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1$$

לכן לפי כלל הסנדויץ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$$

(ד) נתקדם על הישר $x=y=z$ ונקבל

$$\lim_{x\to0} \frac{x^3}{3x^4} = \lim_{x\to0} \frac{1}{3x}$$

גבול זה לא קיים ולכן גם לפונקציה המקורית אין גבול.

(ה) נתקדם לאורך הישר $x=1$ ונקבל כי

$$\lim_{y\to-1} \frac{e^0-1}{e^{y+1}-1} = 0$$

אם נתקדם לאורך הישר $y=-x$ נקבל כי

$$\lim_{x\to1} \frac{e^{x-1}-1}{e^{-x+1}-1} = \lim_{x\to1} \frac{e^{x-1}-1}{\frac{1}{e^{x-1}}-1}$$

נציב $t=e^{x-1}$ ונקבל

$$\lim_{t\to1} \frac{t-1}{\frac{1}{t}-1} = \lim_{t\to1} \frac{t-1}{1-t}t = \lim_{t\to1} -t = -1$$

התקדמנו בשני כיוונים שונים וקיבלנו גבול שונה ולכן הגבול לא קיים.

(ו) נציב $t=x^2+y^2+1$ ונקבל

$$\lim_{t\to1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \lim_{t\to1} \frac{\sqrt{t}-1}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)} = \lim_{t\to1} \frac{1}{(\sqrt{t}+1)} = \frac{1}{2}$$

לכן הגבול הוא $\frac{1}{2}$.