בדידה 1 - תרגיל 6

1. יהי $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2)\}$
א. האם עבור $A = \{1,2\}$ ו $B = \{1,2,3\}$, $R = A \times B$? הסבירו.
ב. במידה ואין שיוויון בסעיף א', האם קיימות קבוצות A ו B כך שמתקיים $R = A \times B$? אם כן, כתבו אותן.
פתרון:

א. לא, כיוון ש: $3 \notin A \Rightarrow (3,1) \notin A \times B$, אבל $(3,1) \in R$, ולכן $R \neq A \times B$.

ב. לא קיימות קבוצות כנ"ל. הסבר: נניח בשלילה כי מתקיים $R = A \times B$ עבור A וB מסויימים. כיוון ש: $(1,1),(2,1),(3,1) \in A \times B$ מתקיים כי $A \subseteq \{1,2,3\}$, בנוסף, $(1,1),(1,2),(1,3) \in A \times B$ ולכן $B \subseteq \{1,2,3\}$. לכן $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \subseteq A \times B$, אבל $(3,2) \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$, ו $(3,2) \notin A \times B$ בסתירה!

2. הוכח או הפרך:
א. $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$
ב. $A \times (B \cup C) \supseteq (A \times B) \cup (A \times C)$
פתרון:

א+ב.

הוכחה:

$$(x,y) \in A \times (B \cup C) \iff (x \in A) \wedge (y \in B \vee y \in C) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

הסבר המעברים לפי סדר: הגדרה, פילוג, הגדרה.

3. הוכח או הפרך:
א. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
ב. $(A \times B) \cup (C \times D) \supseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
פתרון:

א.

הוכחה:

$$(x,y) \in (A \times B) \cup (C \times D) \iff ((x,y) \in A \times B) \vee ((x,y) \in C \times D) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D) \iff ([x \in A \wedge y \in B] \vee x \in C) \wedge ([x \in A \wedge y \in B] \vee y \in D) \Rightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (y \in B \vee y \in D) \iff (x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$$

שימו לב, כי במעבר היחיד שהוא גרירה בכיוון אחד, מהחלק הראשון הורדנו את התנאי ש $y \in B$, ומהחלק השני את התנאי $x \in C$, ולכן זו לא שקילות אלא רק גרירה.

ב.

הפרכה: נפריך ע"י דוגמה נגדית: ניקח: $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, D = \{4\}$.

אזי, הזוג הסדור $(1,4)$ שייך לצד ימין ולא שייך לצד שמאל - כלומר אין הכלה.

4. הוכח כי לכל קבוצה A ואוסף קבוצות $\{B_i\}_{i\in I}$ מתקיים:

$$A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$$

פתרון:

$$(a,b) \in A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) \iff a \in A \wedge b \in \bigcap_{i\in I} B_i \iff a \in A \wedge (\forall i \in I : b \in B_i) \iff$$

$$\iff \forall i \in I : (a \in A \wedge b \in B_i) \iff (a,b) \in \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$$

5. תהי A קבוצה ו־R יחס רפלקסיבי עליה. הוכיחו כי: $\forall n \in \mathbb{N} : R^n \subseteq R^{n+1}$, כלומר: $R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \ldots$. (רמז: אל תנסו אינדוקציה)פתרון:

נשים לב ש־ $R^{n+1} = R^n R$. יהי $(a,b) \in R^n$, צ"ל ש־ $(a,b) \in R^{n+1}$. נשים לב שכיון ש־R רפלקסיבי מתקיים ש־ $(b,b) \in R$, ולכן מהגדרת הרכבת יחסים נקבל שאם $(a,b) \in R^n \wedge (b,b) \in R$ אז $(a,b) \in R^n R = R^{n+1}$, כדרוש.

6. יהיו $A = \{1,2\} = B, C = \{3,4\}$ ונגדיר את היחסים הבאים: $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ כך:

$R = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}, S = \{(2,3),(1,4)\}$.

א. חשבו את $RS \subseteq A \times C$, S^{-1}, R^{-1}.

ב. חשבו SS^{-1}, RR^{-1} וציינו אם התוצאה היא יחס הזהות, יחס הזהות מוכל בה, היא מוכלת ביחס הזהות, או ששום מקרה לא מתקיים.

ג. מצאו קבוצות D_i ויחסים $T_i \subseteq D_i \times D_i$ כך שהתוצאה של $T_i T_i^{-1}$ היא:

*יחס הזהות, *הזהות מוכלת בתוצאה אך לא שווה, *התוצאה מוכלת בזהות ולא שווה, *אין הכלה באף כיוון.

אין צורך לחזור על מקרים שהופיעו בסעיף ב.

פתרון:

א.

$RS = \{(1,4),(1,3),(2,3)\}$, $S^{-1} = \{(3,2),(4,1)\}$, $R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$.

ב.

$SS^{-1} = \{(2,2),(1,1)\} = I_B$,

$RR^{-1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \supseteq I_A$.

ג.

יהי D_1 קבוצה כלשהי. $T_1 = \emptyset$ היחס הריק, נקבל כי $T_1T_1^{-1} = \emptyset \subseteq I_A$.

תהי $D_2 = \{1,2,3\}$. נגדיר $T_2 = \{(1,1),(2,2),(1,2)\}$. אזי $T_2T_2^{-1} = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$, $I_{D_2} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ וברור שאף אחת מקבוצות אלו לא מוכלת בשניה.

7. תהי X קבוצת בנייני האוניברסיטה, ונגדיר יחס "סמיכות" $R \subseteq X \times X$ ע"י: $(a,b) \in R$ אם ורק אם המרחק בין הבניין a והבניין b קטן או שווה למאה מטרים (רוצים הגדרה מדוייקת? אז שיהיה המרחק האוקלידי ב- $\mathbb{R}^3$ בין מרכזי המסות של הבניינים...). האם R הוא בהכרח (כלומר, אל תלכו לבדוק מרחקים):

א. רפלקסיבי

ב. טרנזיטיבי

ג. סימטרי

ד. אנטי סימטר

פתרון:

א. כן. המרחק בין בנין לעצמו הוא 0. כלומר, הבניין סמוך לעצמו.

ב. לא. יכולים להיות שלושה בניינים בשורה שהמרחק בין הראשון לשני הוא 75 מטר וכנ"ל בין השלישי לשני, ואז בין הראשון לשלישי יש 150 מטר ולכן הם לא סמוכים.

ג. כן. למרחק לא משנה מי משמאל ומי מימין.

ד. לא. יכולים להיות שני בניינים סמוכים שונים.