בס"ד

לינארית להנדסה תשע"ט מועד ב פתרון

שאלה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $\vec{x},\vec{y}\in V$. הוכח ש

(א) $||\vec{x}+\vec{y}|| \le ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$.

(ב) $||\vec{x}-\vec{y}|| \ge ||\vec{x}|| - ||\vec{y}||$.

א. מההרצאה.

ב. נציב במשוואה של סעיף א':

$$\|\underbrace{x-y+y}_{=}\| \le \|x-y\| + \|y\|$$

וגל

$$\|x\| \le \|x-y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$$

לכן

שאלה 2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(א) הוכח שאם קיים ל־$\mathbb{R}^n$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A אזי A לכסינה.

(ב) האם המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

לכסינה?

א. מהכיתה.

ב. זה בלוק ז'ורדן $J_6(3)$

וכפי שראינו בכיתה (יש להראות בבחינה!)

יש לו ע"ע $\lambda=3$ אבל רק ו"ע יחיד $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

ולכן אינה לכסינה.

שאלה 3. (א) יהיו V, U ו-W מרחבים וקטורים ותהיינה

$T_1 : V \to U$ חד-חד ערכית, $T_2 : U \to W$ על.

נניח ש $\text{Im}T_1 = \ker T_2$. הוכח ש

$\dim U = \dim V + \dim W$.

(ב) האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ כך ש $\text{Im}T = \ker T$? אם כן, מצאו את T בצורה מפורשת. אם לא, הוכיחו שאינה קיימת.

א. ידוע T_1 חח"ע לכן $\dim \ker T_1 = 0$

T_2 על לכן $\dim \text{Im}\, T_2 = \dim W$

לפי משפט המימדים ל T_1!

$$\underbrace{\dim \ker T_1}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \dim \text{Im}\, T_1 = \dim V \Rightarrow \boxed{\dim \text{Im}\, T_1 = \dim V} \;(*)$$

לפי משפט המימדים ל T_2

$$\underbrace{\dim \ker T_2}_{\overset{\shortparallel}{\dim \text{Im}\, T_1}} + \dim \text{Im}\, T_2 = \dim U$$

נתון

$$\overset{(*)}{\dim V} + \dim W = \dim U$$

ב. כן קיימת. נגדיר לפי משפט ההגדרה:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_4} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$T(e_1) = \vec{0}$

$T(e_2) = \vec{0}$

$T(e_3) = \vec{e_1} \in \ker T$

$T(e_4) = \vec{e_2}$

$\ker T = sp\{\vec{e_1}, e_2\} = \text{Im}\, T$

$$v = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2} + \gamma \vec{e_3} + \delta e_4$$

$$\ldots T(e_1) + \beta \overset{\vec{0}}{T(e_2)} + \gamma T(e_3) + \ldots$$

שאלה 4. תהי

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&2&0&2&0\\3&0&0&0&3\end{bmatrix}$$

(א) מצאו בסיס למרחב העמודות של A.
(ב) השלימו את הבסיס מסעיף א׳ לבסיס של $\mathbb{R}^5$.
(ג) האם קיימת מטריצה B כך ש $rank(AB)=2$? אם כן, מצאו B כזאת. אם לא, הוכיחו שאין.

א 3 העמודות הראשונות בת"ל ולכן הבסיס ל $C(A)$

הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

ב ניתן להשלים לבסיס בכמה אופנים אחד מהם הוא
להוסיף את $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ אם נשים את כולם במטריצה:

$$A\begin{vmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\3&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

$|A|\neq 0$
לפי משפט השקילות זה אומר
שה[י]א הפיכה ולכן העמודות בת"ל

ג כן כמובן ניקח

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\3&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(AB)=2$

ידעתי לבחור אותה כך
לפי כפל עמודה-עמודה

שאלה 5. נניח ש $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ אינה הפיכה.

(א) הוכח ש A, A^2, A^3, A^4 תלויות לינארית כוקטורים ב $\mathbb{R}^{4\times4}$.

(ב) הוכח או הפרך את הטענה הבאה.

$\dim span\{A, A^2, A^3\} = rankA$.

א. לפי משפט קיילי המילטון:

היות ו A אינה הפיכה אז הפולינום האופייני שלה

נראה: $p_A(x) = x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$

כדי שכשנציב את ע"ע $\cancel{x}=0$ נקבל את 0...

לפי קיילי המילטון $p_A(A)=0$

$A^4+\alpha A^3+\beta A^2+\gamma A=0$.

לכן קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי נותן 0.

ב. הפרכה

נניח $A^3 = A^2 = A = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$rank\ A = 2$

$\dim Sp\{A, A^2, A^3\} = 1$