פתרון בוחן בקורס בדידה 1 להנדסה 83-116

ט' כסלו תשע"ז, 4.12.2017

מרצה: שירה גילת **מתרגלים:** אריאל ויצמן ותומר באואר **משך הבוחן:** 80 דקות

הוראות:

- ענו על כל שלוש השאלות על הטופס.
- המחברת המצורפת לבוחן לא תבדק, ויכולה לשמש לטיוטה.
- הקפידו על סדר וניקיון. יש דפים נוספים בסוף הטופס אם אין לכם מספיק מקום.
- אין חומר עזר, גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

שאלה 1. פרדיקט P מעל השלמים ייקרא "חביב" אם לכל $a \in \mathbb{Z}$ קיים $b \in \mathbb{Z}$ כך שהפסוק $P(a) \oplus P(b)$ מקבל ערך T.

תזכורת: $X \oplus Y$ זה הסימון של הקשר XOR (או מוציא).

א. (18 נקודות) תנו דוגמה לשני פרדיקטים חביבים שונים.

ב. (18 נקודות) יהיו P, Q פרדיקטים **שאינם** חביבים. הוכיחו:

$$\exists a \in \mathbb{Z} : P(a) \equiv Q(a) \iff \forall a \in \mathbb{Z} : P(a) \equiv Q(a)$$

דף להמשך פתרון שאלה 1.

פתרון.

א. למשל הפרדיקט $P(a) = a > 0$ והפרדיקט $Q(a) = a > 1$ הם חביבים ושונים. קל לראות שהם שונים כי הם מקבלים ערכים שונים עבור 1, ספציפית $P(1) = T$ ואילו $Q(1) = F$.

נראה ש-$P(a)$ חביב: אם $a > 0$, נבחר $b = -7$ ונקבל $P(a) \oplus P(b) \equiv T \oplus F \equiv T$, ואם $a \leq 0$, נבחר $b = 3$ ונקבל $P(a) \oplus P(b) \equiv F \oplus T \equiv T$. כלומר לכל $a \in \mathbb{Z}$ קיים $b \in \mathbb{Z}$ כך ש-$P(a) \oplus P(b)$ מקבל ערך T. את החביבות של $Q(a)$ מוכיחים בצורה דומה.

למעשה כל פרדיקט שאינו קבוע T או קבוע F הוא חביב. כך שקל מאוד למצוא פרדיקטים חביבים: הפרדיקט $P(a) = a \neq 0$ (שאינו שונה מהפרדיקט $P(a) = a^2 > 0$!), הפרדיקט $P(a)$ המקבל T אם ורק אם a זוגי, הפרדיקט $P(a) = 2a^3 > 100$ וכו'.

ב. הכיוון ($\Leftarrow$) הוא ברור. הרי אם הטענה $Q(a) \equiv P(a)$ נכונה לכל $a \in \mathbb{Z}$, אז בודאי היא נכונה עבור $a = 2$. לכן קיים $a \in \mathbb{Z}$ כך ש-$P(a) \equiv Q(a)$. שימו לב שכיוון זה נכון לכל שני פרדיקטים, ולא השתמשנו בנתון ש-P, Q אינם חביבים.

בכיוון ($\Rightarrow$) הכרחי להשתמש בכך ש-P, Q הם פרדיקטים לא חביבים. נראה שפרדיקט לא חביב הוא קבוע (תמיד T או תמיד F).

נראה שלכל $a, b \in \mathbb{Z}$ מתקיים $P(a) \equiv P(b) \wedge Q(a) \equiv Q(b)$. נניח בשלילה שקיימים $b_0, b_1 \in \mathbb{Z}$ כך ש-$P(b_0) \neq P(b_1)$. לכן, בלי הגבלת הכלליות, $P(b_0) \equiv F \wedge P(b_1) \equiv T$ (אחרת נחליף בין b_0 לבין b_1). כעת יהי $a \in \mathbb{Z}$. אם $P(a) \equiv T$, אז $P(a) \oplus P(b_0) \equiv T$ לפי הגדרת או מוציא, ואם $P(a) \equiv F$, אז $P(a) \oplus P(b_1) \equiv T$. לכן P חביב, וקיבלנו סתירה לנתון. ההוכחה עבור Q היא דומה.

לכן או ש-$P(a) \equiv T$ לכל $a \in \mathbb{Z}$, או ש-$P(a) \equiv F$ לכל $a \in \mathbb{Z}$ וכנ"ל עבור Q. לכן אם ידוע שקיים a עבור $P(a) \equiv Q(a)$, אז הם יתנו ערכים זהים גם לכל מספר שלם אחר. כלומר שקולים על כל $\mathbb{Z}$.

שאלה 2.

א. (18 נקודות) יהי $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ פסוק לוגי, תהי C צורת CNF שלו ותהי D צורת DNF שלו.
כתבו את הפסוק $D \wedge \neg(x_3 \to x_2)$ בצורת CNF.

ב. (18 נקודות) נגדיר את סדרת לוקאס: שני האיברים הראשונים בסדרה הם $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ ועבור כל $n \geq 3$ נקבע $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. הוכיחו שלכל $n \geq 3$ מתקיים $L_{n-2} + L_{n+2} = 3L_n$.

דף להמשך פתרון שאלה 2.

פתרון.

א. נזכר כי צורת CNF של פסוק לוגי היא "וגם" של פסוקיות "או" על ליטרלים (אטומים או שלילה של אטומים). בפרט, אם C_1, C_2 הן צורות CNF של פסוקים כלשהם, אז גם $C_1 \wedge C_2$ היא פסוק בצורת CNF. לכן מספיק להציג בנפרד את D ואת $\neg(x_3 \to x_2)$ בצורת CNF.

נתון כי C ו-D הן צורות נורמליות של אותו פסוק, ולכן $C \equiv D$. לפי התרגיל שראינו בכיתה

$$\neg(x_3 \to x_2) \equiv \neg(\neg x_3 \vee x_2) \equiv x_3 \wedge \neg x_2$$

כשבמעבר השני נעזרו בכלל דה מורגן. לסיכום, פתרון אפשרי הוא $C \wedge x_3 \wedge \neg x_2$ (שימו לב שתתכנה צורות CNF שקולות אחרות).

ב. נוכיח את הטענה בעזרת אינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: נחשב כמה ערכים ראשונים לסדרת לוקאס:

$$L_1 = 1,\ L_2 = 3,\ L_3 = 1 + 3 = 4,\ L_4 = 3 + 4 = 7,\ L_5 = 4 + 7 = 11$$

כעת נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 3$, ואכן $L_{3-2} + L_{3+2} = 1 + 11 = 3 \cdot 4 = 3L_3$.

צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור $n \geq 3$ כלשהו ונוכיח עבור אותה $n+1$:

$$L_{(n+1)-2} + L_{(n+1)+2} = 3L_{n+1}$$

כלומר

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n+3} &= L_{n-1} + L_{n+1} + L_{n+2} = L_{n-1} + L_{n-1} + L_n + L_{n+2} \\ &= 2L_{n-1} + L_{n-1} + L_{n-2} + L_{n+2} \overset{*}{=} 3L_{n-1} + 3L_n = 3(L_{n-1} + L_n) = 3L_{n+1} \end{aligned}$$

כשהשתמשנו כמה פעמים בהגדרת סדרת לוקאס ובשיוויון המסומן $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

לכן לפי אקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n \geq 3$.

שאלה 3. (35 נקודות) בכל סעיף מצאו קבוצות A, B, C המקיימות את תנאי הסעיף:

א. $A \cup B \subseteq A \cup C$ וגם $B \not\subseteq C$.

ב. $A \cap B \subseteq A \cap C$ וגם $B \not\subseteq C$.

ג. $(A \in B) \wedge (B \in C) \wedge (A \notin C)$.

ד. $(A \in B) \wedge (B \in C) \wedge (A \in C)$

ה. $(A \in B) \wedge (A \subseteq B)$

פתרון. שימו לב שישנן אינסוף תשובות נכונות לכל סעיף.

א. $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3\}$

ב. $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$

ג. $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{\{1\}\}\}$

ד. $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{\{1\}\}, \{1\}\}$

ה. $A = \{3\}, B = \{\{3\}, 3\}$

דף להמשך פתרון שאלה 3.

דף נוסף לפתרון שאלה _____

דף נוסף לפתרון שאלה _____

דף נוסף לפתרון שאלה _____