הבהרה מפעם שעברה

- T_pM זה מרחב משיק - מרחב וקטורי - עובר דרך הראשית
- $p+T_pM$ זה ישר משיק - מרחב אפיני(מ"ו מוזז) - עובר דרך p

תרגיל

מצא את משוואת המישור המשיק לאליפסואיד

$$M=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1\right\}$$

בנקודה $p=\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ שעליו.

פתרון

דרך א'

נמצא פרמטריזציה לאליפסואיד. נעזר בפרמטריזציה של ספירת היחידה S^2 המוכרת מקואורדינטות ספריות:

$$\begin{matrix}0\le\theta\le2\pi\\0\le\phi\le\pi\end{matrix}\qquad r:\Omega\to S^2\qquad r(\phi,\theta)=(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)$$

נחשוב על האליפסואיד כספירה שמתחו אותה. במקום $x^2+y^2+z^2=1$ יש לנו $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2=1$, ולכן נגדיר פרמטריזציה כזו:

$$\begin{matrix}0\le\theta\le2\pi\\0\le\phi\le\pi\end{matrix}\qquad r(\phi,\theta)=(2\cos\theta\sin\phi,3\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)$$

על מנת למצוא את המשיור המשיק ל-p נמצא תחילה את ϕ ו-θ המתאימות ל-p.

$$(2\cos\theta\sin\phi,3\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)\overset{!}{=}\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\phi=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\qquad\theta=\frac{\pi}{4}$$

או

$$\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{3}},\sin\phi=\sqrt{\frac{2}{3}}\qquad\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\theta$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

באופן כללי, הווקטורים המשיקים הם

$$r_\phi = (2\cos\theta\cos\phi, 3\sin\theta\cos\phi, -\sin\phi)$$

$$r_\theta = (-2\sin\theta\sin\phi, 3\cos\theta\sin\phi, 0)$$

ובנקודה המדוברת p:

$$r_\phi(p) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad r_\theta(p) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, 0\right)$$

ההצגה הפרמטרית עבור המישור המשיק היא

$$p+T_pM = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + t\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + s\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, 0\right) \middle| \begin{array}{c} -\infty < t < \infty \\ -\infty < s < \infty \end{array} \right\}$$

אבל ביקשו את <u>משוואת</u> המישור, $Ax+By+Cz+D=0$!

ניזכר בעובדה שעבור משוואת מישור כנ"ל הוקטור (A,B,C) מאונך למישור.

תזכורת: עבור שני וקטורים $u, v \in \mathbb{R}^3$ בת"ל, הווקטור $w = u \times v$ הוא וקטור שמאונך ל-u ול-v.

אנו יודעים שהמישור המשיק נפרש ע"י

$$u = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \qquad v = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, 0\right)$$

כדי למצוא את הוקטור המאונך למישור נעזר במכפלה הוקטורית

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \cdots = \left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2}\right)$$

הווקטור $\vec{n} = \left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2}\right)$ מאונך למישור, וגם הווקטור $(3,2,6) = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\vec{n}$. משוואת המישור המשיק היא

$$3x + 2y + 6z + D = 0$$

והוא עובר בנקודה p. נציב את p:

$$3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+2\cdot\sqrt{3}+6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+D=0$$

$$\boxed{D=-6\sqrt{3}}$$

ולכן משוואת המישור המשיק היא:

$$\boxed{3x+2y+6z-6\sqrt{3}=0}$$

דרך ב

נשים לב שM הוא משטח רמה של הפונקציה

$$F\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2$$

השדה הגרדיאנטי $\nabla F=\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},2z\right)$ מאונך למשטחי הרמה של F(בהם $F=C$ קבוע).

בנקודה p:

$$\nabla F\left(p\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

מאונך ל$P+T_pM$.

$\nabla F\left(p\right)$ מאונך למישור המשיק בנקודה p. נכפול ב$3\sqrt{3}$ ונקבל

$$\vec{n}=\left(\overbrace{3}^{A},\overbrace{2}^{B},\overbrace{6}^{C}\right)$$

מאונך גם הוא. נותר למצוא את D... $D=-6\sqrt{3}$

אוריאנטציה

אוריאנטציה של יריעה M היא בחירת כיוון "לטיול" על היריעה בכל נקודה שעליה.

אוריאנטציה של עקומות

דוגמה

מעגל היחידה ב$\mathbb{R}^2$. נמצא כמה פרמטריזציות:

$$\varphi_1\left(t\right)=\left(\cos t,\sin t\right)$$

$$\varphi_2(u) = (\cos(2u), \sin(2u))$$

$$\varphi_3(v) = (\cos(v), -\sin(v)) = (\cos(-v), \sin(-v))$$

הפרמטריזציות φ_2 וφ_3 מתקבלות ע"י הרכבה של $\varphi_1(t)$ עם

$$t = t(u) = 2u \qquad t = t(v) = -v$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2 > 0 \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = -1 < 0$$

φ_1 וφ_2 מגדירות אותה אוריאנטציה על המעגל. φ_3 מגדירה אוריאנטציה הפוכה.

הגדרה

אוריאנטציה במישור - בחירה של כיוון הסיבוב.
באופן פורמלי מגדירים בחירה זו בעזרת בסיס סדור (e_1, e_2).
את שקילות בחירת הבסיס מגדירים ע"י דטרמיננטת מטריצת המעבר: עבור שני בסיסים $\begin{matrix}(b_1, b_2)\\(c_1, c_2)\end{matrix}$ כך ש $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$:

- אם $\det A > 0$ $\Leftarrow$ הבסיסים מגדירים אותה אוריאנטציה
- אם $\det A < 0$ $\Leftarrow$ הבסיסים מגדירים אוריאנטציה הפוכה