עוד קצת על פונקציית גמא

כזכור, הגדרנו את פונקציית גמא לכל $x > 0$ ע"י $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
זוהי פונקציה מאוד שימושית שבעזרתה ניתן להכליל המון נוסחאות.
בהרצאה הוכחה הזהות $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, בעזרתה ניתן להכליל את Γ גם לערכים שליליים, למשל עבור $x = -\frac{1}{2}$ נקבל

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

אם ניקח $x = \epsilon$ קטן נקבל

$$\Gamma(\epsilon+1) = \epsilon\Gamma(\epsilon) \Rightarrow \Gamma(\epsilon) = \frac{\Gamma(\epsilon+1)}{\epsilon}$$

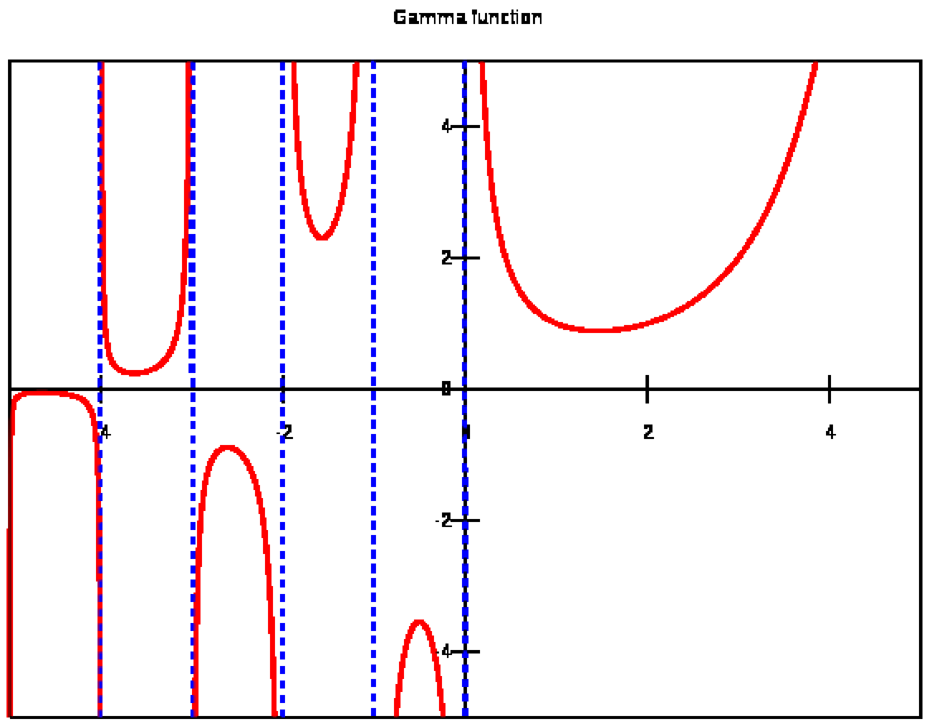
כאשר $\epsilon \to 0$, $\Gamma(\epsilon+1) = \Gamma(1) = 0! = 1$ כך שמקבלים

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^-}\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

רואים של$\Gamma(x)$ יש נקודה סינגולרית ב$x = 0$.
(בעתיד תקראו לנקודה מסוג זה "קוטב")
באופן דומה ניתן להראות ש$\Gamma(x) \to \pm\infty$ כאשר x שואף למספרים $0, -1, -2, -3, ...$

להלן הגרף של $\Gamma(x)$:



אתם מוזמנים לרשום ב-$Mupad$:

```
plot(gamma(x),x=-5..5)
```

ההגדרה של פונקציית Γ נראית קצת מוזרץ למה יש את ההזזה המרגיזה $\Gamma(n) = (n-1)!$?

ובכן, גאוס הגדיר פונקציה שונה במקצת, שלה הוא קרא פונקציית Π(פי גדול)

$$\Pi(x) \overset{def}{=} \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \,(= \Gamma(x+1))$$

שמקבלים בעזרתה נוסחאות נקיות יותר

$$\Pi(x) = x\Pi(x-1) \qquad \Pi(n) = n!$$

אך משום מה זה לא תפס...

נראה עכשיו שימוש יפה לפונקציית גמא:
נתבונן במונום הבא:

$$y = f(x) = x^k$$

ניתן לגזור פעם אחת

$$y' = \frac{d}{dx}y = kx^{(k-1)}$$

ופעמיים

$$y'' = k\left(k-1\right)x^{k-2}$$

ואפילו n פעמים:

$$y^{(n)} = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$$

עבור $0 \leq n \leq k$
נחליף את העצרת בפונקציות גמא:

$$y^{(n)} = \frac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k-n+1\right)}x^{k-n}$$

נראה טיפשי, אבל להפך! ניתן כעת להגדיר נגזרות מסדר <u>לא שלם</u>.

למשל

עבור $k=1$, $n=\frac{1}{2}$ נקבל נחזרת "חצי פעם"

$$y = x^1 = x$$

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{1!}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sqrt{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$$

נגזור עוד חצי פעם:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 1 = 1 = \frac{d^1}{dx^1}x$$

קיבלנו

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}x = \frac{d}{dx}x$$

בסימון אחר

$$\sqrt{\frac{d}{dx}}\sqrt{\frac{d}{dx}}x=\sqrt{\frac{d}{dx}}^{2}x\Rightarrow "\sqrt{D}\sqrt{D}=D$$

מ-ה-מם!

ננסה לגזור את הפונקציה $y=x$ מינוס פעם אחת:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}x=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1-(-1)+1)}x=\frac{1!}{\Gamma(3)}x^2=\frac{1}{2!}x^2=\frac{x^2}{2}$$

מה יקרה אם ננסה לגזור פעמיים את x?

$$\frac{d^2}{dx^2}\overset{?}{=}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1-2+1)}\cdot x^{-1}=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(0)}\cdot x^{-1}$$

אם נפרש את $\frac{1}{\Gamma(0)}$ בתור אפס(כי "$\Gamma(0)\pm\infty$") נקבל כידוע $x''=0$". ובכלל, כשנתקלים בביטוי $\frac{1}{\Gamma(p)}$ עבור $p=0,-1,-2,...$ נהוג להתייחס אליו בתור 0.

הערה חשובה

הענף הזה במתמטיקה של נגזרות מסדר לא שלם נקרא "Fractional Calculus"

וזה ממש לא למבחן!

(דוגמה למד"ר מסדר שברי: $y^{(\pi)}+\sin x\cdot y^{(\sqrt{2})}=0$)

פונקציות בסל

תרגיל

הוכח מיחסי הרקורסיה לפונציות בסל(modified)

$$\begin{cases} I_{n-1}(x)+I_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}I_n(x)\\ I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x)=2I_n'(x)\end{cases}$$

ש$I_n(x)$ מקיים את משוואת בסל(modified)

$$x^2I_n''(x)+xI_n'(x)-\left(x^2+n^2\right)I_n(x)=0$$

פתרון

הפרש הרקורסיות:

$$(1)\quad 2I_{n+1}(x)=2I_n'(x)-\frac{2n}{x}I_n(x)$$

נכפיל פי $\frac{x}{2}$

$$(2)\quad xI_{n+1}(x)=xI_n'(x)-nI_n(x)$$

נגזור את (2)

$$I_{n+1}(x)+xI_{n+1}'(x)=I_n'(x)+xI_n''(x)-nI_n'(x)$$

$$(3)\quad xI_n''(x)+(1-n)I_n'(x)=xI_{n+1}'(x)+I_{n+1}(x)$$

נכפול שוב בx

$$x^2I_n''(x)+(1-n)xI_n'(x)=x^2I_{n+1}'(x)+xI_{n+1}(x)$$

נוסיף n כפול משוואה (2):

$$(5)\quad x^2I_n''(x)+xI_n'(x)-n^2I_n(x)=x^2I_{n+1}'(x)+x(n+1)I_{n+1}(x)$$

סכום של הרקורסיות נותן:

$$2I_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}I_n(x)+2I_n'(x)$$

$$(6)\quad I_{n-1}(x)=\frac{n}{x}I_n(x)+I_n'(x)$$

מכפילים ע"י x:

$$(7)\quad xI_{n-1}(x)=nI_n(x)+xI_n'(x)$$

נחליף $n\to n-1$(נקדם את n ב1):

$$(8)\quad xI_n(x)=(n+1)I_{n+1}(x)+xI_{n+1}'(x)$$

צד ימין של (5) שווה לx כפול צד ימין של (8)

$$x^2I_n''(x)+xI_n'(x)-n^2I_n(x)=x\cdot xI_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2I_n''(x)+xI_n'(x)-\left(x^2+n^2\right)I_n(x)=0$$

תרגיל

הוכח את יחסי הרקורסיה לפונקציות בסל(modified) מהייצוג האינטגרלי של פונקציות בסל:

$$n \in \mathbb{Z} \qquad I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cdot\cos\theta}\cdot\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$x > 0$$

פתרון

הוכחת הנוסחה הראשונה

$$I_{n-1}(x)+I_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos\left[(n-1)\theta\right]\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos\left((n+1)\theta\right)\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\left\{\cos\left[(n-1)\theta\right]+\cos\left[(n+1)\theta\right]\right\}\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cdot 2\cdot\cos n\theta\cdot\cos(-\theta)\,\mathrm{d}\theta = ...$$

$$\left[\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

$$... = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cdot\cos n\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{d}{dx}\left[e^{x\cos\theta}\cdot\cos\theta\right]\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta\right] =$$

$$= 2\frac{d}{dx}I_n(x) = 2I_n'(x)$$

$$\blacksquare$$

הוכחת הנוסחה השנייה

$$I_{n-1}\left(x\right)-I_{n+1}\left(x\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos\left[\left(n-1\right)\theta\right]\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{x\cos\theta}\cos\left[\left(n+1\right)\theta\right]\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{x\cos\theta}\left\{\cos\left[\left(n-1\right)\theta\right]\right\}\,\mathrm{d}\theta=...$$

$$\left[\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

$$...=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{x\cos\theta}\left(-2\right)\sin n\theta\cdot\sin\left(-\theta\right)\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{x\cos\theta}\cdot\sin n\theta\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

חישוב עזר:

$$\frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\cdot\sin n\theta\right]=-x\sin\theta\cdot e^{x\cos\theta}\cdot\sin n\theta+ne^{x\cos\theta\cdot\cos n\theta}$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\cdot\sin n\theta\right]=e^{x\cos\theta}\cdot\sin n\theta\cdot\sin\theta-\frac{n}{x}e^{x\cos\theta}\cdot\cos n\theta$$

חזרה להוכחה:

$$\Rightarrow=2\pi\int_{0}^{\pi}\left\{-\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\cdot\sin n\theta\right]+\frac{n}{x}e^{x\cos\theta}\cdot\cos n\theta\right\}\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=-\frac{2}{\pi x}\int_{0}^{\pi}\frac{d}{d\theta}\left[e^{x\cos\theta}\sin n\theta\right]d\theta=$$

$$=+\frac{2n}{x}\cdot\overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{x\cos\theta}\cdot\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta}^{I_n(x)}=$$

$$=\frac{-2}{\pi x}e^{x\cos\theta}\cdot\sin n\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}+\frac{2n}{x}\cdot I_n\left(x\right)$$

■