תרגיל בית 7 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום)**.** הכינו דגם מנייר של החבורה הדיהדרלית D_4.

שאלה 2. אפשר להעזר בדגם של D_n לבדיקות.

1. מצאו את כל תת־החבורות הלא טריוויאליות של D_4, והוכיחו שכולן אבליות. האם כולן ציקליות?
2. הוכיחו לכל $m > 1$ כי $Z(D_{2m-1}) = \{\mathrm{id}\}$ ו-$Z(D_{2m}) = \langle \sigma^m \rangle$. רמז: איך נראה איבר כללי בחבורה דיהדרלית?
3. כתבו את משוואת המחלקות של D_5 מבלי להתאמץ. כלומר חשבו את הגודל של כל מחלקות הצמידות ללא צורך בחישוב ישיר לכל איבר. רמז: הסעיף הקודם עם כך שגודל מחלקת צמידות מחלק את סדר החבורה.

שאלה 3. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

1. $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^{-3}$.
2. $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.
3. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}^+$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.
4. $f\colon S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.
5. $f_x\colon G \to G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו-$x \in G$ איבר.
6. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = ([k], [k])$.
7. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 3,\, n \bmod 6)$.

שאלה 4. הוכיחו שאם G חבורה נוצרת סופית ויש הומומורפיזם $f: G \to H$ אז $\mathrm{im}(f)$ נוצרת סופית.

שאלה 5. יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם.

1. הוכיחו שאם G אבלית, אז $\mathrm{im}\, f$ תת־חבורה אבלית.

2. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

3. הוכיחו או הפריכו: קיים אפימורפיזם $\varphi : D_8 \to U_{17}$.

שאלה 6. הפריכו או הביאו דוגמא לשאלות הבאות:

1. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}^{\times}, \cdot)$. (רמז: העזרו בשאלה הקודמת)

2. קיים מונומורפיזם $f : S_4 \to S_5$.

3. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10}$

שאלה 7. תהי G חבורה. נגדיר $f : G \to G$ לפי $f(g) = g^2$.

1. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

2. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

בהצלחה!